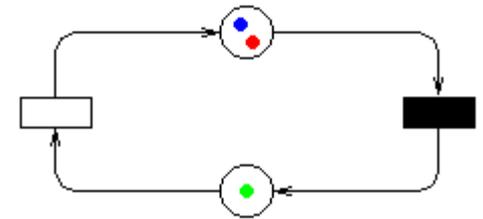
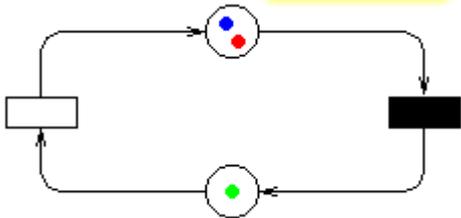


A nalyse des **S**ystèmes de **P**roduction **I**



INTRODUCTION :

La théorie des systèmes et de leur commande, l'Automatique, s'est intéressée dès ses origines à des systèmes physiques généralement décrits par des équations différentielles ou aux dérivées partielles.

L'avènement des ordinateurs conduit à décrire parfois l'évolution de ces systèmes par des équations dynamiques en temps discret, ce qui ne remet pas en cause la nature continue de cette évolution.

Avec les progrès de la technologie, L'Homme s'est mis à concevoir des systèmes de plus en plus complexes et complètement artificiels, par exemple:

- Les réseaux de transport,
- Réseaux de communication et d'ordinateurs,
- Ateliers de production manufacturière,
-

Dans ces systèmes, l'essentiel de l'enchaînement dynamique des tâches provient de phénomènes, de synchronisation, d'exclusion mutuelle ou compétition dans l'utilisation de ressources communes, ce qui nécessite une politique d'arbitrage ou de priorité, questions généralement désignées sous le terme d'ORDONNANCEMENT.

Ce type de dynamique échappe totalement à la modélisation par équations différentielles ou leurs équivalents en temps discret.

Un système à événement discret (SED) est un système dynamique dont l'évolution est gouvernée par l'occurrence d'événements :

- opération effectuée par une machine,
- instruction traitée par un processeur,
-

HISTORIQUE :

Les réseaux de Petri (RdP) sont un outil graphique et mathématique qui trouvent leur domaine d'application dans un grand nombre de secteurs où les notions d'événements et d'évolutions simultanées (parallèles) sont importantes.

Cette théorie est encore jeune car elle est née de la thèse de Carl Adam Petri, intitulée « Communication avec des Automates » présentée en 1962 à l'université de Darmstadt.

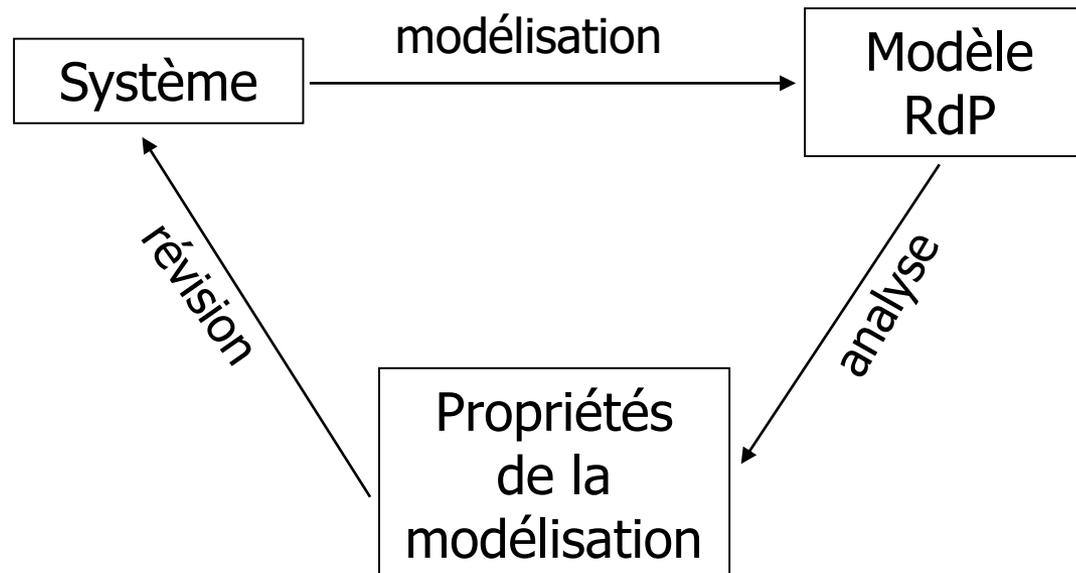
Parmi les champs d'application des RdP, on peut citer:

- L'évaluation des performances de systèmes discrets,
- Les protocoles de communication,
- La commande des ateliers de fabrication,
- La conception de logiciels temps-réel,
- Les systèmes d'information,
- Les interfaces Homme-Machine,

Pour ce qui est de la conduite des ateliers de fabrication automatisés, l'application des RdP s'est effectuée d'abord en France sous la forme un peu altérée de la norme Grafcet pour la programmation des Automates Programmables Industriels.

Cette norme a d'abord été imaginée par une commission de l'Afcet en 1977, puis elle est devenue une norme industrielle en France en 1980.

MOTIVATIONS:



Le formalisme des RdP est un outil qui permet d'étudier les systèmes dynamiques et discrets.

Il s'agit d'une représentation mathématique permettant la modélisation d'un système.

L'analyse d'un RdP peut révéler des caractéristiques importantes du système concernant sa structure et son comportement (sa dynamique).

Les résultats de cette analyse sont utilisés pour évaluer le système et en permettre la modification et/ou l'amélioration, le cas échéant.

CARACTERISTIQUES PRINCIPALES DES RdP :

- Distribution des états et des changements d'états dans le réseau,
- Dépendance et indépendance d'ensembles d'événements représentées explicitement,
- Représentation à différents niveaux d'abstraction (détaillés comme abstraits)
- Vérification des propriétés possibles car basées sur un formalisme mathématique rigoureux

- Modélisation simulable,
- Représentation graphique.

CONCEPTS DE BASE :

Événement : les événements sont des actions se déroulant dans le système. Le déclenchement d'un événement dépend de l'état du système. Un état peut alors être décrit comme un ensemble de conditions.

Condition : une condition est un prédicat ou une description logique d'un état du système. Une condition est vraie ou fausse.

Déclenchement, préconditions/postconditions : les conditions nécessaires au déclenchement d'un événement sont les préconditions de l'événement. Lorsqu'un événement se produit, certaines de ses préconditions peuvent cesser d'être vraies alors que d'autres conditions, appelées postconditions de l'événement deviennent vraies.

Exemple :

Atelier de coupe

Conditions :

- La machine de coupe est au repos,
- Une commande est en attente,
- La commande est en cours de traitement,
- La commande est terminée,

Evénements :

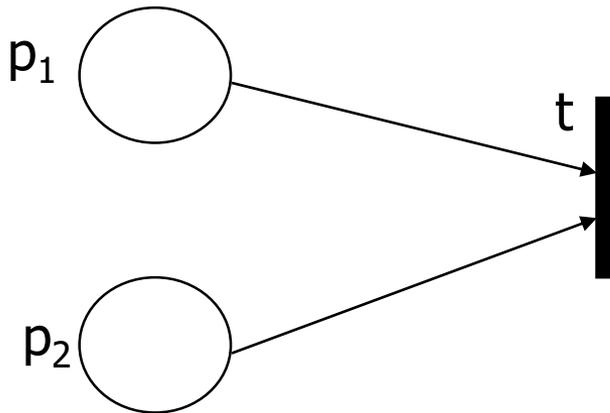
- Une commande arrive,
- La machine débute la commande,
- La machine termine la commande,
- La commande est envoyée pour la livraison.

Modélisation d'un système événement/transition :

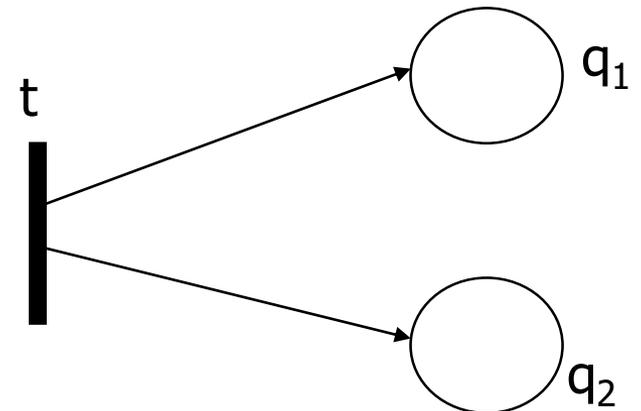
Condition : modélisée à l'aide d'une **place**,

Événement : modélisé à l'aide d'une **transition**.

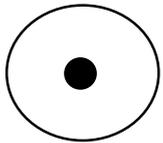
Précondition d'une transition



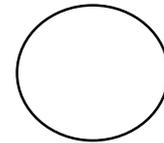
Postcondition d'une transition



satisfaction d'une contrainte : modélisé à l'aide d'un **jeton (marque)**.

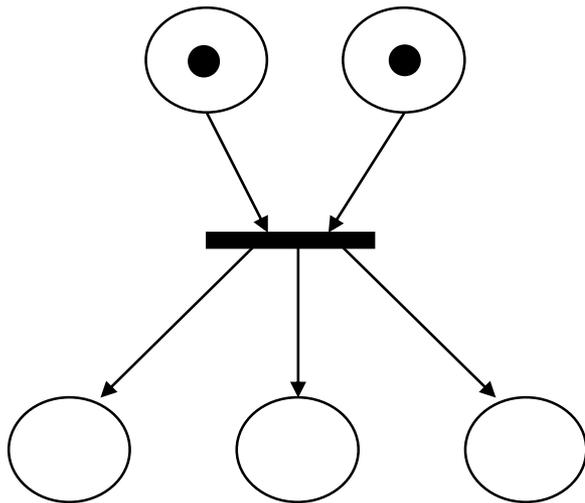


condition vraie

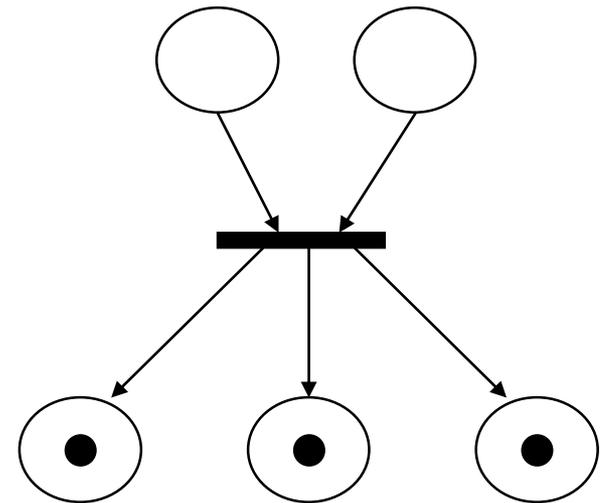


condition fausse

Déclenchement d'une transition tirable (franchissable) :

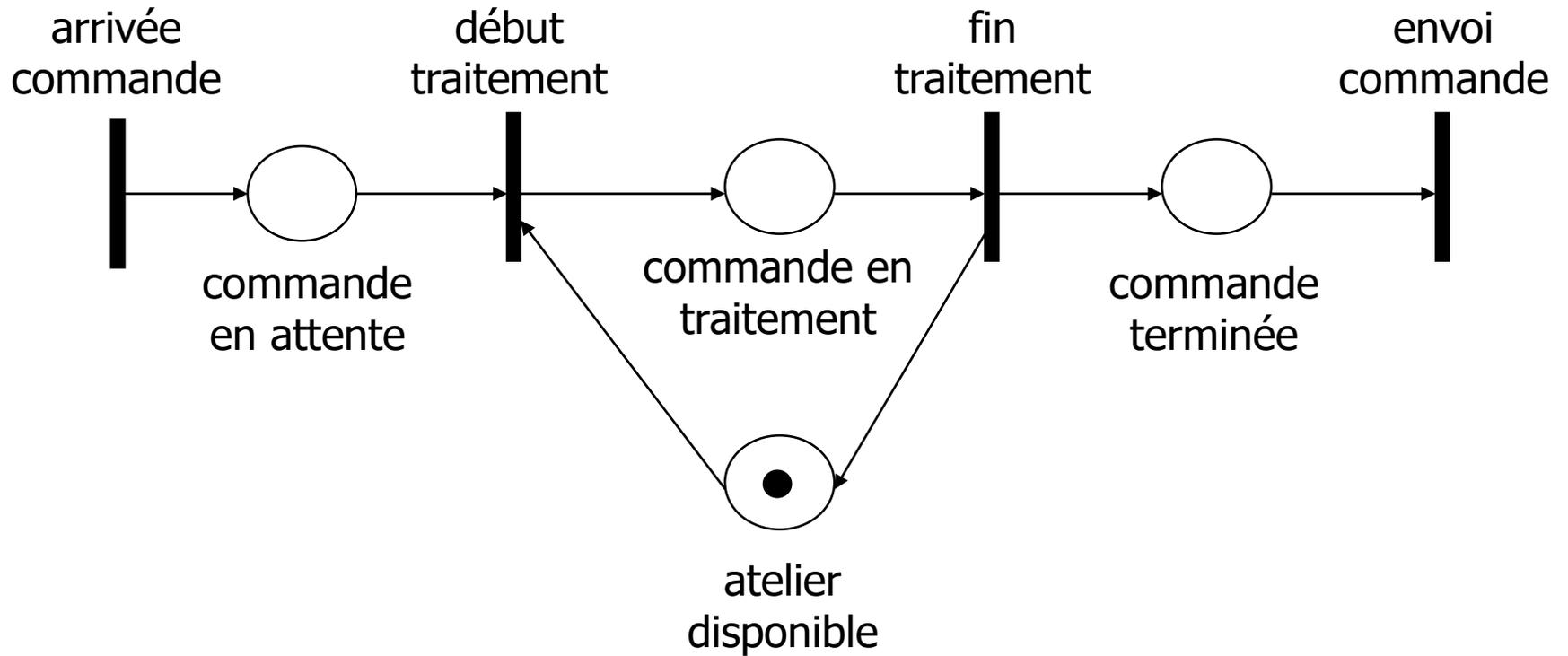


avant



après

Retour sur l'atelier de coupe :



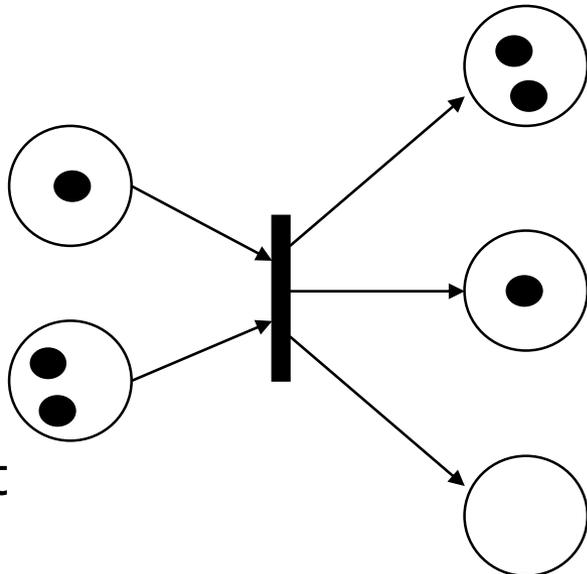
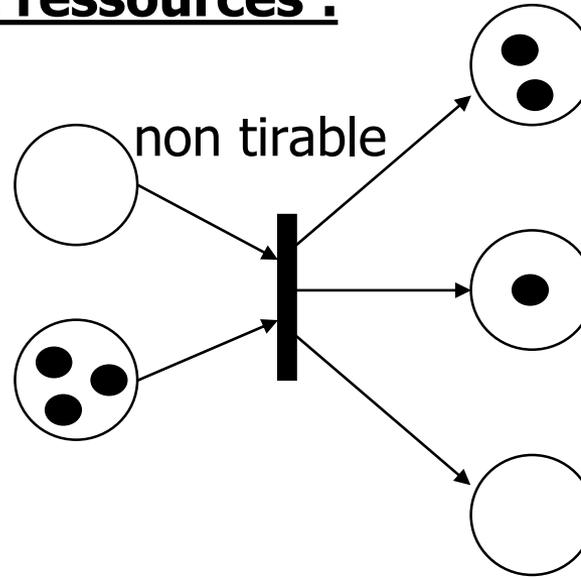
Modélisation de systèmes avec ressources :

Pour certains systèmes, il est plus juste de raisonner en termes de ressources au sens large, plutôt qu'en termes de conditions/événements :

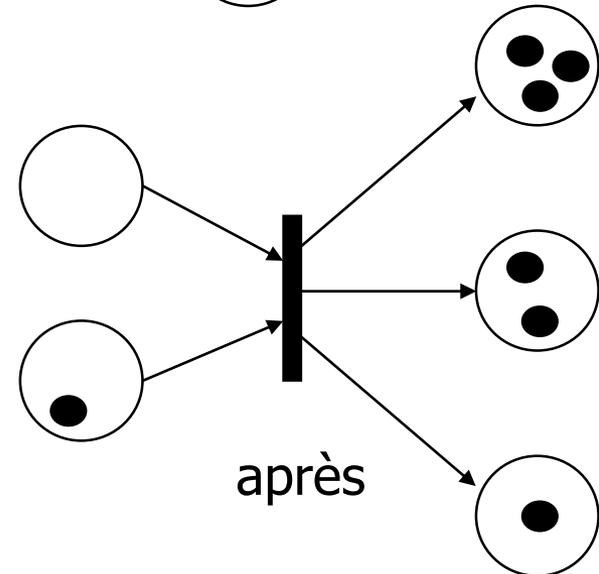
- Les places peuvent alors contenir plusieurs jetons,
- Le nombre de jetons contenus dans une place reflète le nombre de ressources qu'elle possède,
- Les jetons d'une place n'ont pas d'identité individuelle, ils sont indiscernables,
- Ces ressources sont consommées et produites par les événements du système.

Modélisation de systèmes avec ressources :

Tir d'une transition :



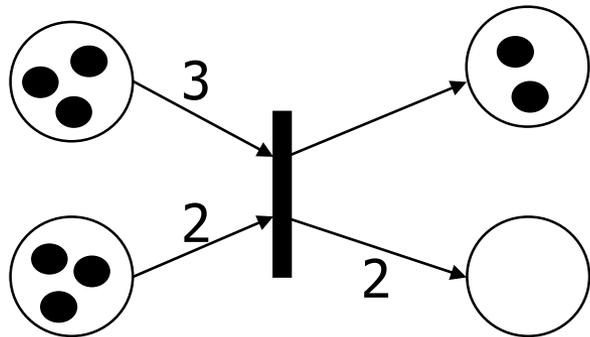
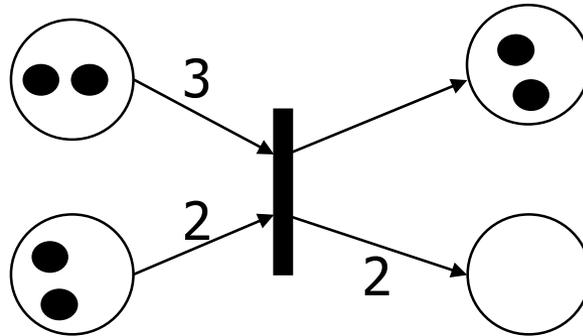
avant



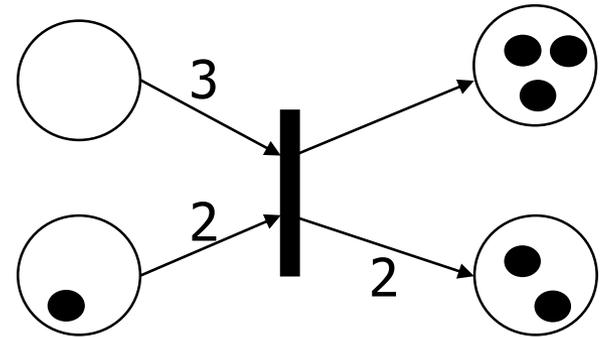
après

Modélisation de systèmes avec ressources : Valuation des arcs

non tirable

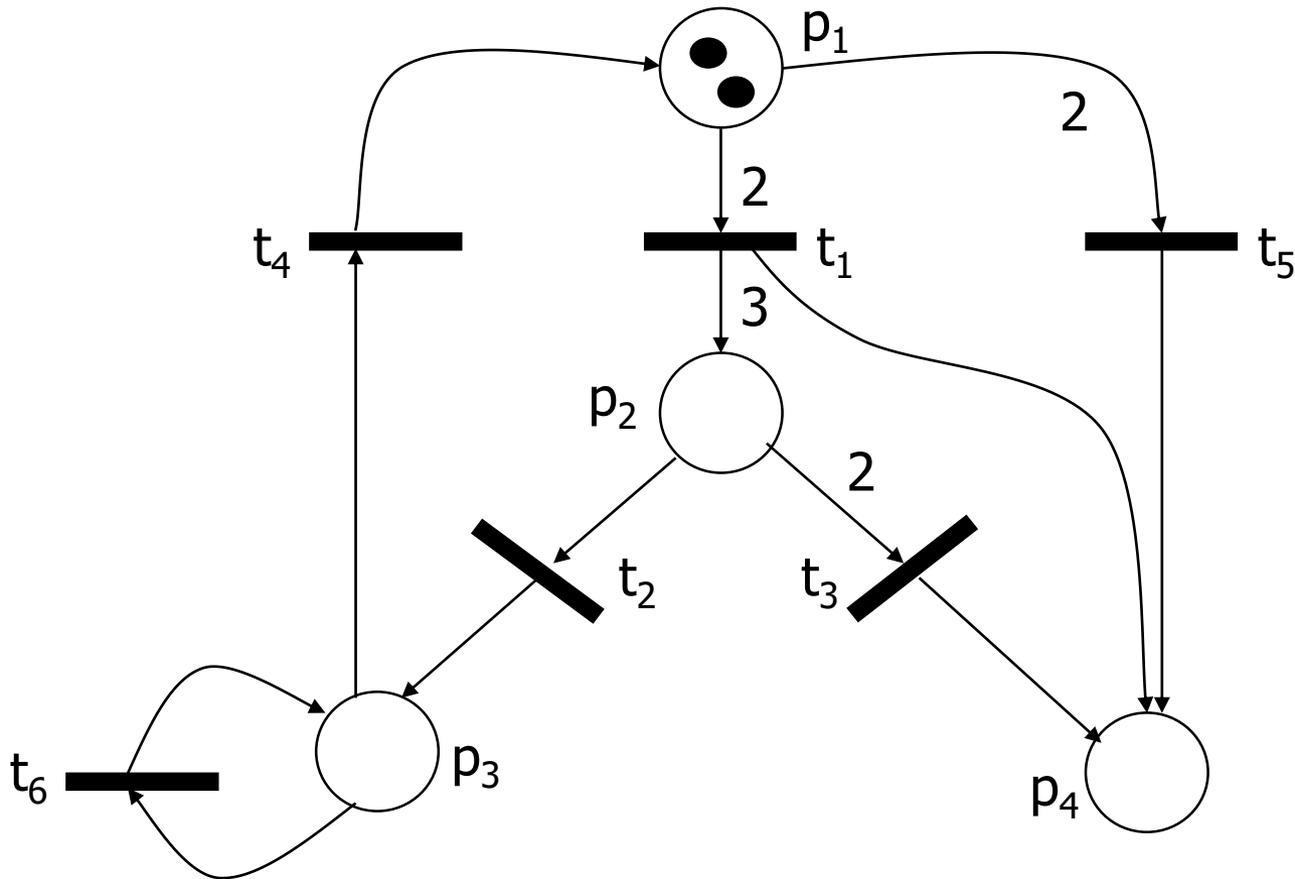


avant



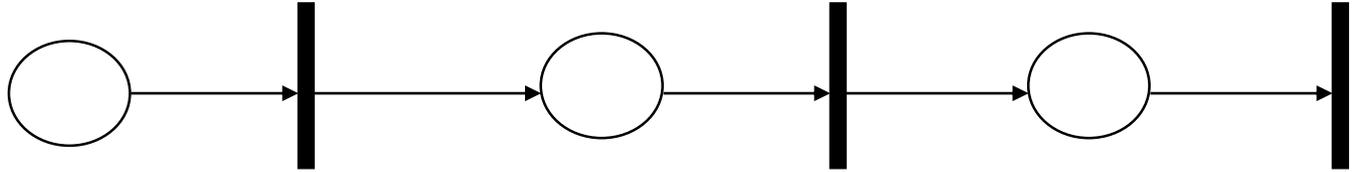
après

Exercice : Quelles sont les transitions franchissables ? La distribution des jetons après les différents franchissements ?

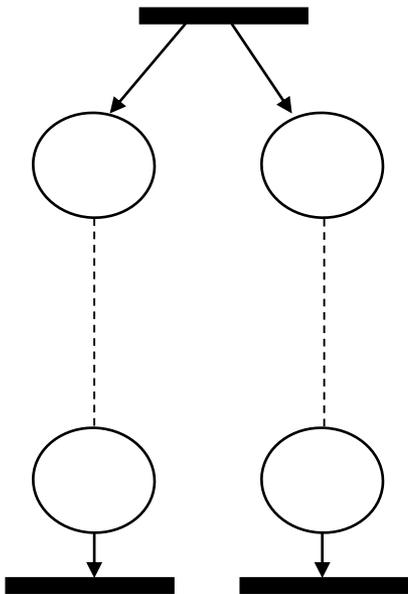


Les structures de base :

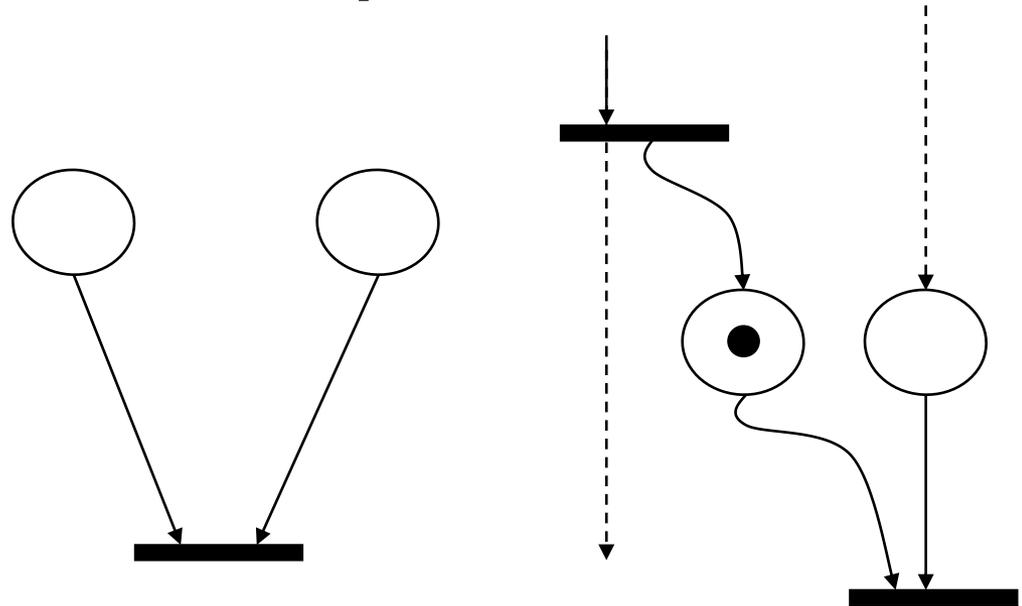
séquence :



parallélisme (concurrency)



synchronisation

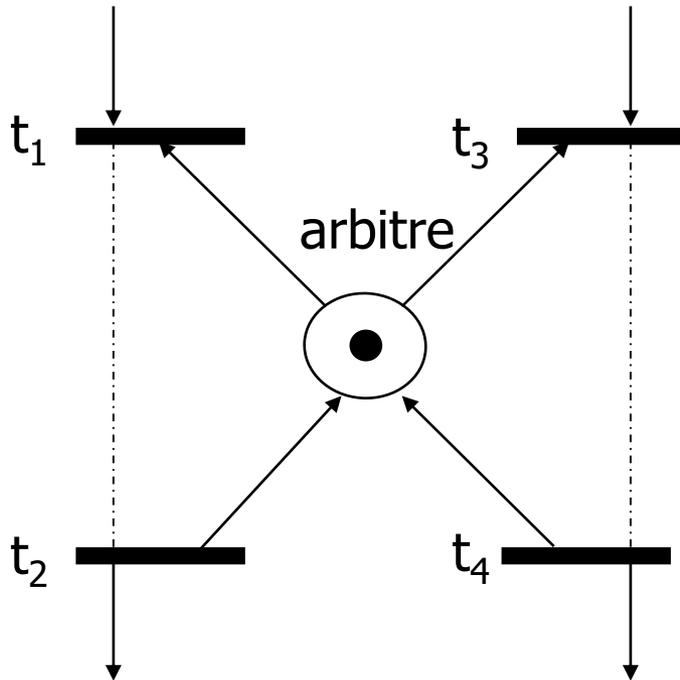


rendez-vous

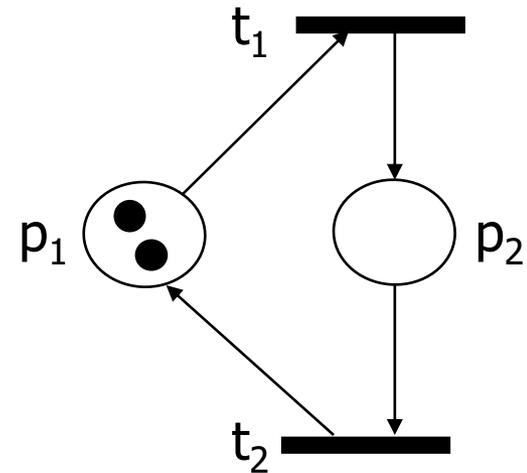
sémaphore

Les structures de base :

partage de ressource



capacité limitée



Formalisme définitions :

Un RdP est un quadruplet

$$R = \langle P, T, \text{Pre}, \text{Post} \rangle$$

où :

- **P est un ensemble fini de places,**
- **T est un ensemble fini de transitions,**
- **Pre : $P \times T \rightarrow \mathbb{N}$ est l'application incidence avant (places précédentes),**
- **Post : $P \times T \rightarrow \mathbb{N}$ est l'application incidence arrière (places suivantes),**

**On utilise aussi la notation : $C = \text{Post} - \text{Pre}$,
avec C la matrice d'incidence du RdP.**

Formalisme définitions :

Un RdP marqué est un couple

$$N = \langle R, M \rangle$$

où :

- R est un RdP,
- M est le marquage initial du réseau,

C'est une application $M : P \rightarrow \mathbb{N}$

$M(p)$ représente alors le nombre de jetons contenus dans la place p .

Graphe associé et notations matricielles :

A un RdP on peut associer un graphe qui possède deux types de nœuds: les places et les transitions.

Un arc relie une place p à une transition t , si et seulement si $\text{Pre}(p,t) \neq 0$.

Un arc relie une transition t à une place p , si et seulement si $\text{Post}(p,t) \neq 0$.

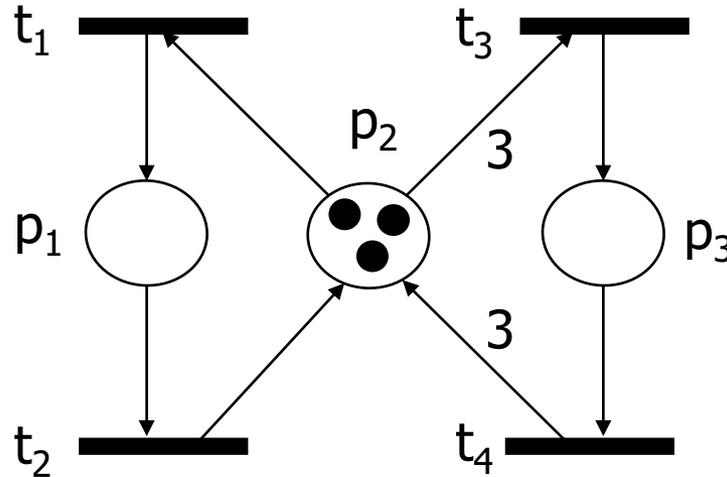
Les valeurs non nulles des matrices Pre et Post sont associées aux arcs comme étiquettes (par défaut on prend la valeur 1).

Le marquage M peut être représenté par un vecteur ayant pour dimension le nombre de places.

Pre , Post et C seront alors des matrices dont le nombre de lignes est égal au nombre de places et le nombre de colonnes est égal au nombre de transitions.

On note $\text{Pre}(\cdot,t)$, $\text{Post}(\cdot,t)$ et $C(\cdot,t)$ les colonnes des matrices correspondantes associées à une transition t .

Graphe associé et notations matricielles :



$$M = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{matrix}$$

$P = \{p_1, p_2, p_3\}, T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$

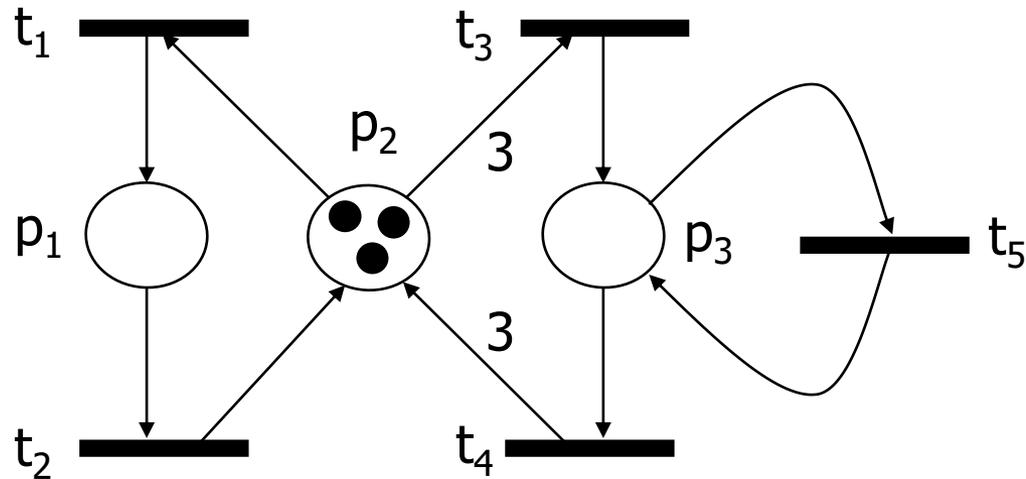
$$Pre = \begin{matrix} & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ p_1 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ p_2 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \\ p_3 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad Post = \begin{matrix} & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ p_1 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ p_2 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\ p_3 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad C = \begin{matrix} & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ p_1 & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ p_2 & \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \\ p_3 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

RdP pur :

Un RdP est pur si et seulement si :

$$\forall p \in P \text{ et } \forall t \in T, \text{Pre}(p, t) \cdot \text{Post}(p, t) = 0$$

Le graphe ne comprend aucune boucle élémentaire, c'est-à-dire aucune transition ayant la même place en entrée et en sortie.



Réseau non pur

Transition franchissable :

Une transition t est franchissable si et seulement si :

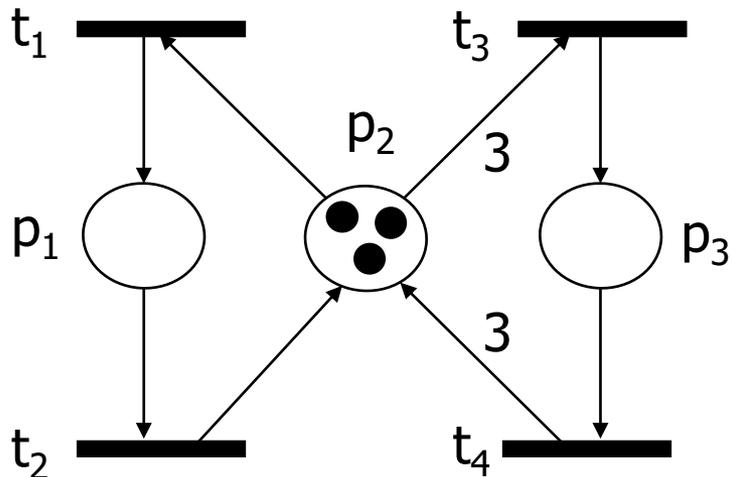
$$\forall p \in P, M(p) \geq \text{Pre}(p, t),$$

On peut exprimer que t est franchissable par les notations suivantes:

$$M \geq \text{Pre}(\cdot, t),$$

$$M [t >,$$

$$M \xrightarrow{t},$$



$$\text{Pre}(\cdot, t_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \text{Pre}(\cdot, t_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Franchissement d'une transition :

Si t est franchissable pour le marquage M , le franchissement (ou tir) de t conduit au nouveau marquage M' tel que :

$$\forall p \in P, M'(p) = M(p) + \text{Post}(p, t) - \text{Pre}(p, t),$$

On utilise aussi les notations suivantes:

$$M' = M + \text{Post}(\cdot, t) - \text{Pre}(\cdot, t),$$

$$M [t > M',$$

$$M \xrightarrow{t} M',$$

Par exemple, après le franchissement de t_3 , à partir du marquage initial, on obtient:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Conflit et parallélisme

- **Conflit structurel :**

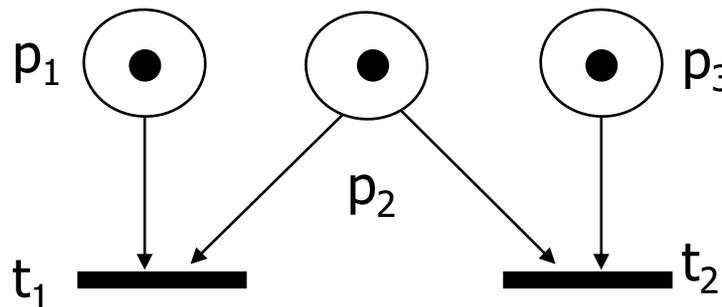
Deux transitions t_1 et t_2 sont en conflit structurel si et seulement si, elles ont au moins une place d'entrée commune :

$$\exists p \in P, \text{Pre}(p, t_1) \cdot \text{Pre}(p, t_2) \neq 0,$$

- **Conflit effectif :**

t_1 et t_2 sont en conflit effectif pour un marquage M si et seulement si t_1 et t_2 sont en conflit structurel et que:

$$M \geq \text{Pre}(\cdot, t_1) \text{ et } M \geq \text{Pre}(\cdot, t_2),$$



Conflit et parallélisme

- **Parallélisme structurel** : deux transitions t_1 et t_2 sont parallèles structurellement si :

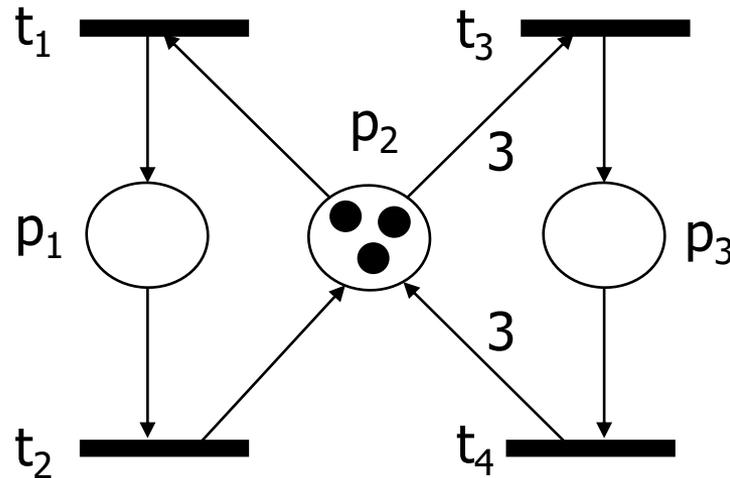
$$(\text{Pre}(\cdot, t_1))^T \times \text{Pre}(\cdot, t_2) = 0$$

Elles n'ont donc aucune place d'entrée commune, le produit scalaire de leurs vecteurs Pre est donc nul.

- **Parallélisme effectif** : deux transitions t_1 et t_2 sont parallèles pour un marquage donné M , si et seulement si, elles sont parallèles structurellement et :

$$M \geq \text{Pre}(\cdot, t_1) \text{ et } M \geq \text{Pre}(\cdot, t_2),$$

Conflit et parallélisme



t_1 et t_3 sont en conflit structurel car $\text{Pre}(p_2, t_1) \cdot \text{Pre}(p_2, t_3) = 3$. Elles sont aussi en conflit effectif pour le marquage initial donné.

t_2 et t_4 sont structurellement parallèles car $\text{Pre}(\cdot, t_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\text{Pre}(\cdot, t_4) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Pour le marquage $M = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
effectivement
manière indépendante.

les transitions t_2 et t_4 deviennent
parallèles et peuvent ainsi être franchies de

Séquence de franchissement

$$\text{si } M_0 \xrightarrow{t_1} M_1 \text{ et } M_1 \xrightarrow{t_2} M_2$$

On dit que la séquence $t_1 t_2$ est franchissable à partir de M_0 et on note :

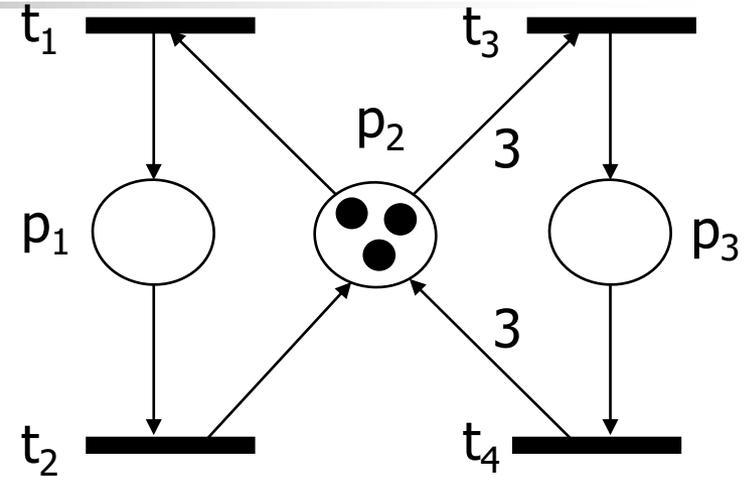
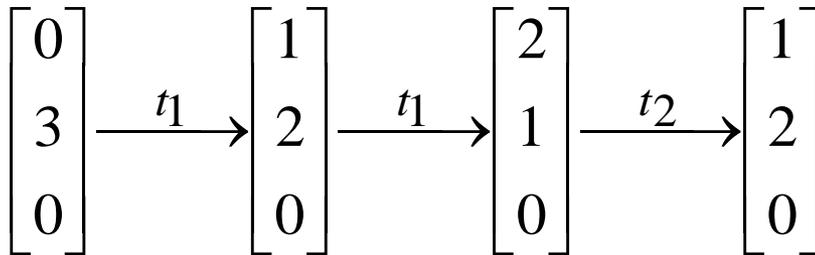
$$M_0 [t_1 t_2 > M_2,$$

$$M_0 \xrightarrow{t_1 t_2} M_2,$$

Soit \bar{s} le vecteur dont les composantes $\bar{s}(t)$ sont le nombre d'occurrences des transitions t dans une séquence de franchissement s , ce vecteur est appelé vecteur caractéristique de s . Sa dimension est égale au nombre de transitions du RdP.

Séquence de franchissement

Soit la séquence $s = t_1 t_1 t_2$



Et $\overline{t_1 t_1 t_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{matrix}$

Les évolutions du marquage d'un RdP sont données par l'équation :

$$M' = M - \text{Pre. } \overline{s} + \text{Post. } \overline{s}$$

Séquence de franchissement

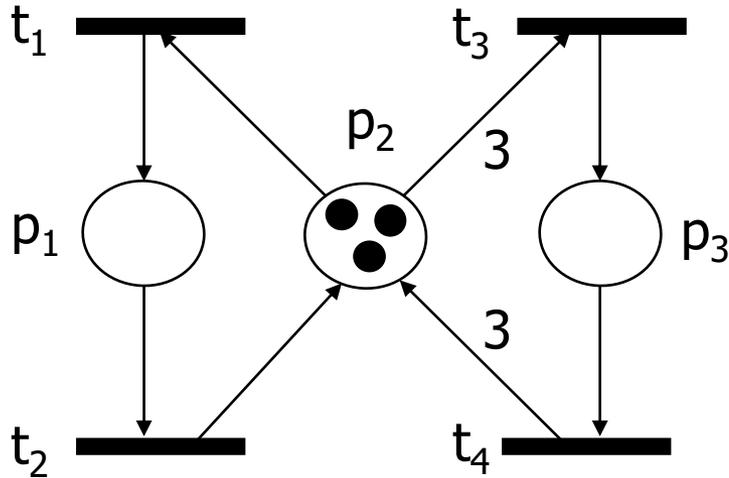
$$M' = M + C.\bar{S}, \text{ avec } M \geq 0 \text{ et } \bar{S} \geq 0$$

Cette équation est appelée l'équation fondamentale d'un RdP.

ATTENTION : il n'est pas suffisant de trouver un vecteur caractéristique \bar{S} qui vérifie l'équation fondamentale pour être sûr qu'il existe une séquence de tir s effectivement réalisable du marquage M vers le marquage M' .

En effet, il faut que le marquage de départ soit tel que les transitions seront effectivement franchissables pour chaque marquage intermédiaire.

Séquence de franchissement



$$C = \begin{matrix} & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ p_1 & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ p_2 & \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \\ p_3 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad M = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{matrix}$$

Soit la séquence de tir $t_1 t_3 t_2 t_4$, on obtient : $\overline{t_1 t_3 t_2 t_4} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Et on a bien $M_0 = M_0 + C \cdot \overline{t_1 t_3 t_2 t_4}$, bien que la séquence de tir ne soit pas réalisable !!

Ensemble des marquages accessibles

L'ensemble des marquages accessibles $A(R, M_0)$ d'un RdP marqué est l'ensemble des marquages que l'on peut atteindre à partir du marquage initial M_0 par une séquence de franchissement :

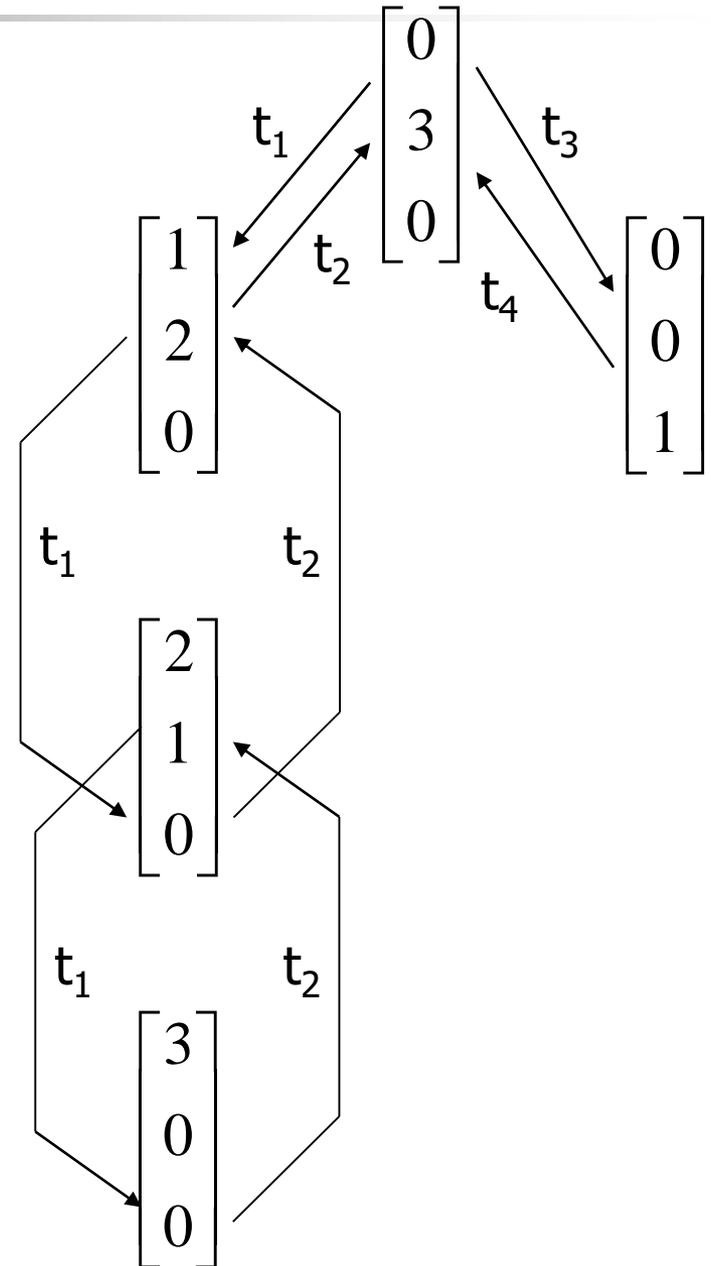
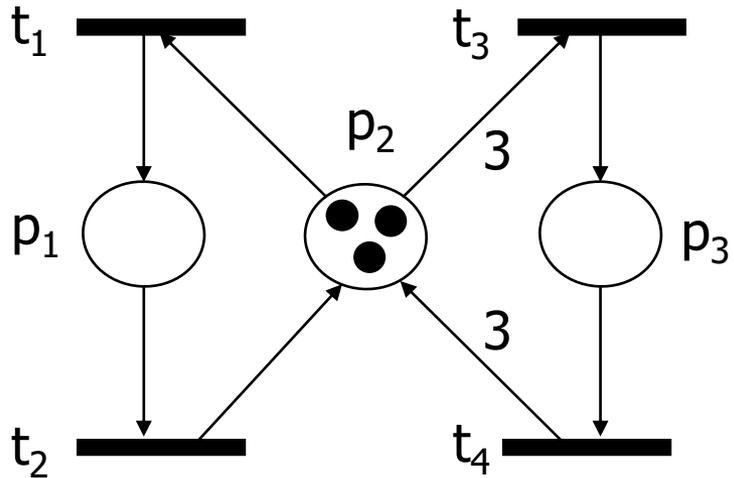
$$A(R, M_0) = \left\{ M_i, \exists s M_0 \xrightarrow{s} M_i \right\}$$

Lorsque cet ensemble est fini, on peut le représenter sous la forme d'un graphe $GA(R, M_0)$.

Ce graphe a pour ensemble de sommets l'ensemble des marquages accessibles $A(R, M_0)$. Un arc orienté relie deux sommets M_i et M_j s'il existe une transition t franchissable permettant de passer d'un marquage à un autre

$$M_i \xrightarrow{t} M_j$$

Ensemble des marquages accessibles



Propriétés des RdP

- Système physique : il doit posséder quelques propriétés remarquables – par exemple, un stock doit avoir une capacité limitée.
- Modèle : le modèle représente le comportement du système. Pour le valider il faut donc s'assurer qu'il possède les propriétés attendues.

Propriétés remarquables des RdP

- **Finitude** : le système étudié possède des ressources qui ont des limitations physiques (nombre d'emplacements dans un stock, nombre de machines, ...). Un modèle non borné traduit une impossibilité physique (un nombre d'en cours infini !!).
- **Vivacité** : le système ne peut pas arriver dans une situation de blocage (total ou partiel). Un modèle non vivant traduit, par exemple, une mauvaise synchronisation des opérations ou un partage des ressources inadapté.

Propriétés remarquables des RdP

- **Répétitivité** : le système peut avoir un comportement cyclique. Un modèle non répétitif traduit le fait que le système n'a pas de régime permanent.
- **Réversibilité** : le système peut à tout instant revenir dans son état initial. Un modèle non réversible traduit l'impossibilité de réinitialiser le système de production.

Pour les RdP marqués, on parle de bonnes propriétés car elles impliquent des considérations sur l'ensemble des marquages accessibles, à partir du marquage initial. Comme cet ensemble n'est pas toujours fini, ces propriétés ne produisent pas directement des algorithmes permettant de tester si la propriété est vérifiée ou non.

Pour les RdP non marqués, les propriétés sont telles que des méthodes de calcul peuvent être dérivées directement des définitions par résolution d'un système d'équations linéaires.

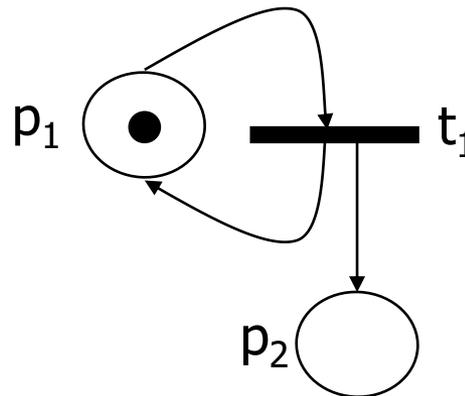
Propriétés remarquables des RdP

- Bornitude (finitude)** : une place p d'un RdP marqué N est k -bornée si et seulement si :

$$\forall M' \in A(R, M_0), M'(p) \leq k,$$

si $k=1$ on dit que la place est binaire .

Un RdP marqué N est k -borné si et seulement si toutes ses places sont k -bornées.



RdP non borné

Propriétés remarquables des RdP

- **Vivacité** : quel que soit l'état courant du système, un événement particulier (pris parmi tous les événements possibles) sera réalisable moyennant le passage par une succession d'événements intermédiaires.

A partir de n'importe quel marquage accessible, il existe une séquence de tir contenant n'importe quelle des transitions du réseau. Pas de blocage, ni d'une partie du réseau (quelques opérations ne peuvent plus avoir lieu) ni de tout le réseau (blocage de la ligne de production).

- **Transition quasi-vivante** : une transition t d'un réseau marqué $N = \langle R, M_0 \rangle$ est quasi-vivante si et seulement si il existe une séquence de franchissement s telle que:

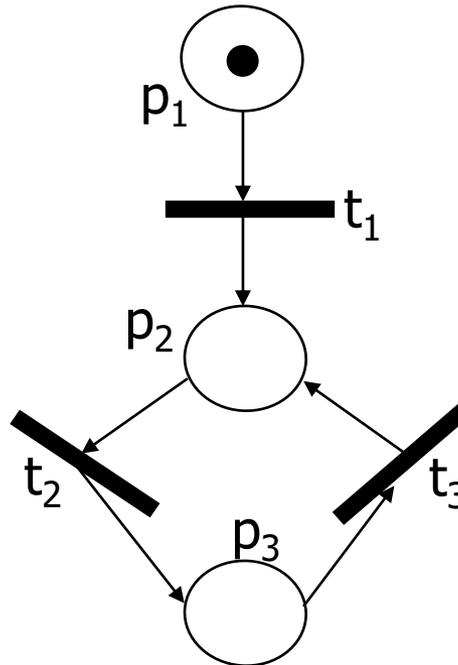
$$M_0 \xrightarrow{s} M' \text{ et } M' \xrightarrow{t}$$

Propriétés remarquables des RdP

- **Transition vivante** : une transition t d'un réseau marqué $N = \langle R, M_0 \rangle$ est vivante si et seulement si :

$$\forall M' \in A(R, M_0), \exists s M' \xrightarrow{s; t}$$

La transition t_1 est quasi-vivante (elle peut être franchie une fois)

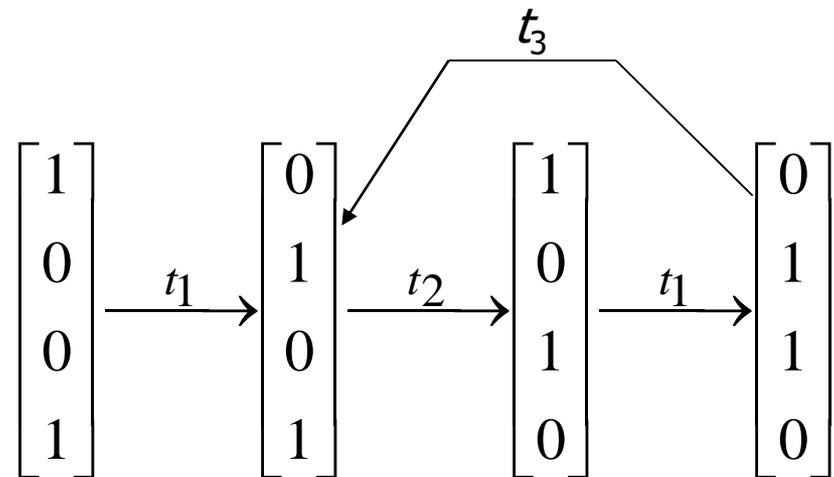
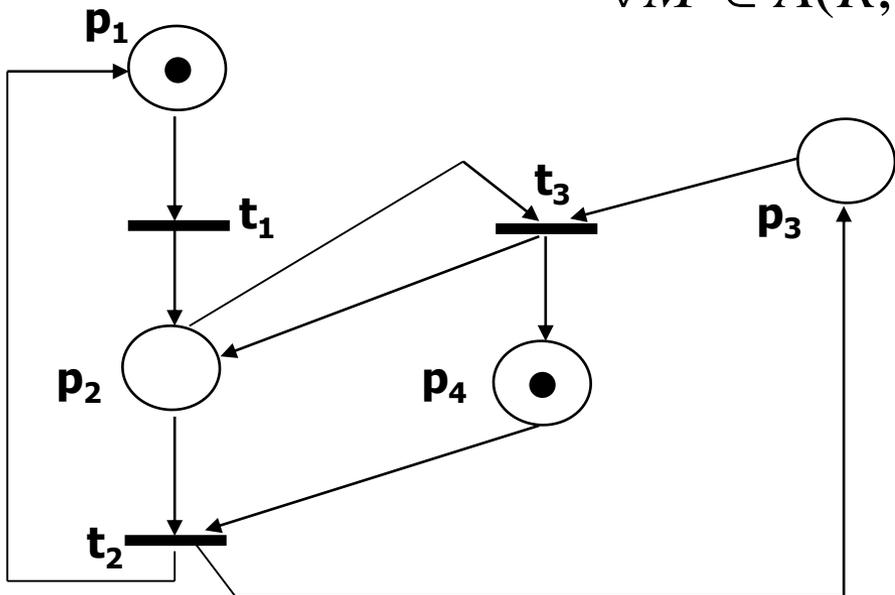


mais non vivante !!
par contre, t_2 et t_3 sont vivantes.

Propriétés remarquables des RdP

- **Réseau marqué vivant** : Un réseau de Petri marqué $N = \langle R, M_0 \rangle$ est vivant si et seulement si toutes ses transitions sont vivantes.
- **Réinitialisable** : Un réseau de Petri marqué $N = \langle R, M_0 \rangle$ est réinitialisable (propre) si et seulement si son graphe des marquages accessibles $GA(R, M_0)$ est fortement connexe :

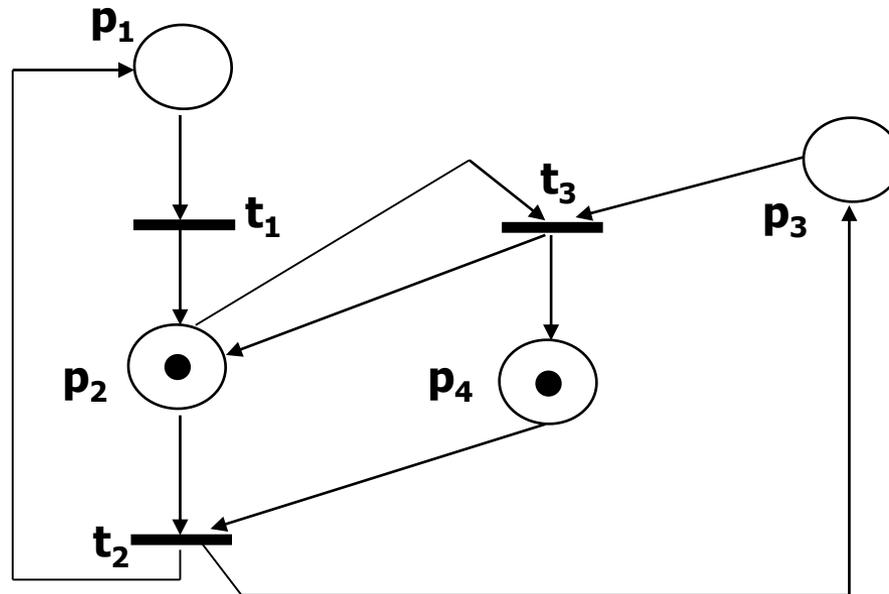
$$\forall M' \in A(R, M_0), \exists s M' \xrightarrow{s} M_0$$



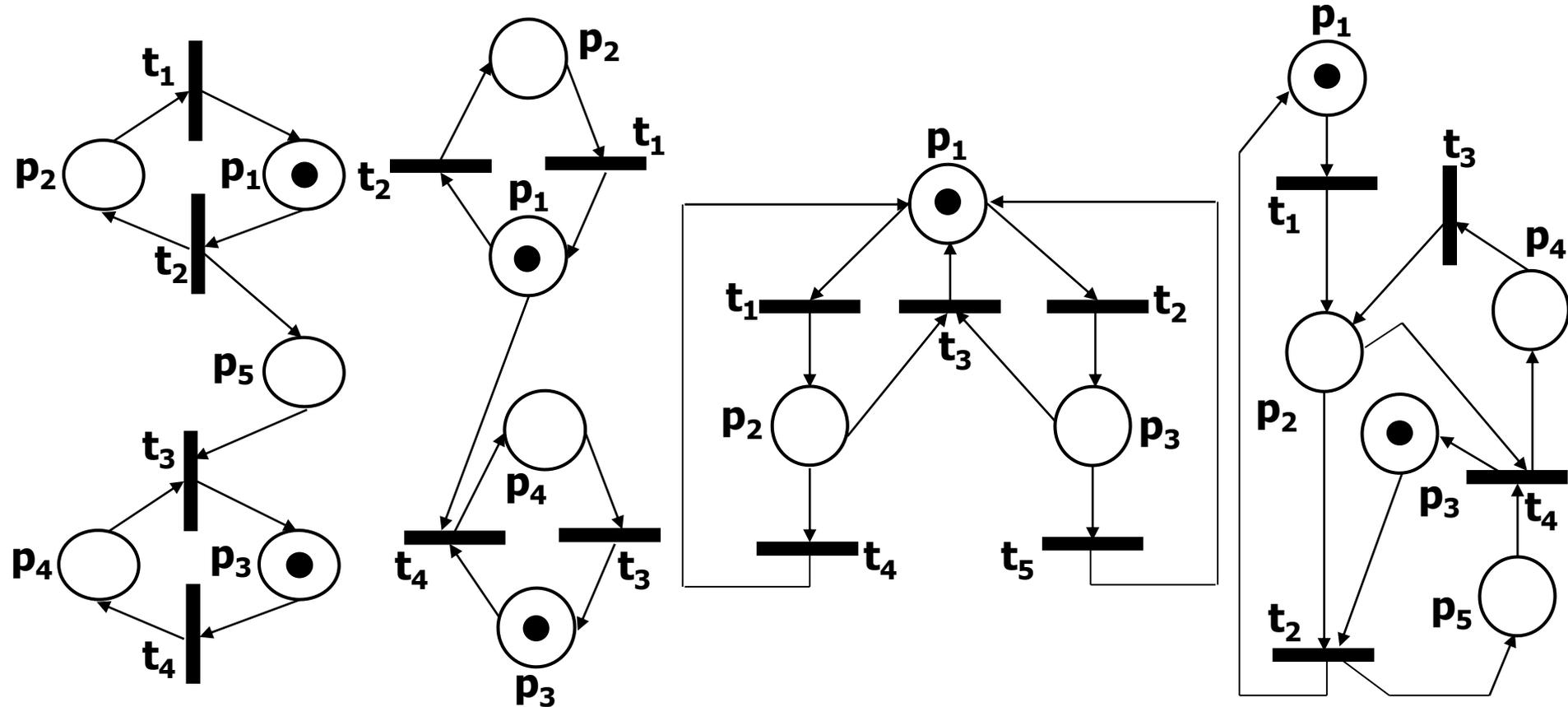
non réinitialisable mais vivant !!

Propriétés remarquables des RdP

Exercice -1 : construire le graphe des marquages accessibles et en déduire certaines propriétés pour le RdP suivant :



Exercice 0 : Pour chaque réseau de Petri, indiquer, en le justifiant, s'il est borné, vivant, sauf et réinitialisable.



Réseau 1

Réseau 2

Réseau 3

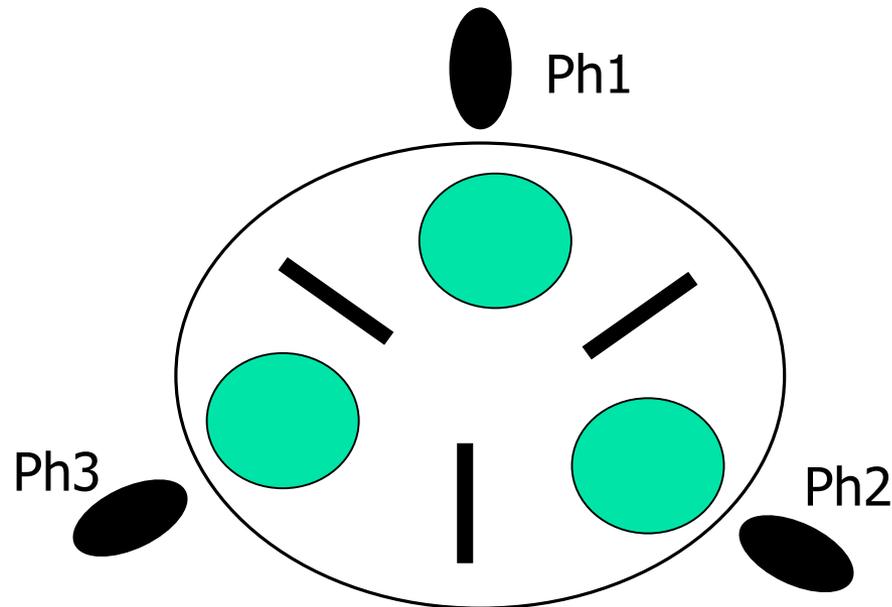
Réseau 4

Das berühmteste Beispiel verteilter Algorithmen



Exercice 1

Les philosophes : soient trois philosophes mangeurs de spaghettis. Chaque philosophe peut être soit en train de penser, soit en train de manger. Pour manger un philosophe a besoin de deux ressources qui sont des cuillères. Malheureusement, la philosophie ne rapportant pas assez, il n'y a que trois cuillères sur la table, posées entre les philosophes. Dans la situation initiale, les philosophes pensent. Chaque fois qu'un philosophe décide de manger, il doit prendre la cuillère située à sa droite et la cuillère située à sa gauche. Quand il a terminé il repose les cuillères.



Exercice 2 : interblocage

Soient deux processus, Processus A et Processus B tels que :

Les deux processus consistent à réaliser successivement deux opérations de calcul en utilisant deux ressources R1 et R2 (initialement disponibles).

- Pour le processus A, la première opération de calcul nécessite la ressource R1, la seconde opération nécessite toujours la ressource R1 et la deuxième ressource R2.

A la fin du second calcul, les deux ressources sont alors libérées.

- Pour le processus B, la première opération de calcul nécessite la ressource R2, la seconde opération nécessite toujours la ressource R2 et la deuxième ressource R1.

A la fin du second calcul, les deux ressources sont alors libérées.

exercice 3 : Problème des lecteurs/écrivains

On considère le problème de l'accès à des fichiers, accessibles en lecture et en écriture. L'accès aux fichiers est régi par les règles suivantes :

- Les processus écrivains s'exécutent en exclusion mutuelle, car les actions d'écriture qui peuvent modifier une partie des données doivent s'exécuter de manière atomique,
- Les processus lecteurs et écrivains sont en exclusion mutuelle, car les lectures et les écritures doivent s'exécuter en assurant la cohérence des données manipulées (celles lues par rapport à celles en cours d'écriture),
- Les lecteurs peuvent lire en parallèle, car les procédures de lecture ne modifient pas les données et peuvent donc s'exécuter en parallèle, librement sans interaction et sans exclusion.

On suppose que l'on connaît le nombre maximum de lecteurs pouvant lire en parallèle, à savoir N : le RdP ?

exercice 3 : Problème des lecteurs/écrivains

Suite :

- Si l'on suppose qu'il y a s lecteurs potentiels et r écrivains, rajouter la règle suivante :
 - Toute demande de lecture doit être mise en attente dès qu'il y a une demande d'écriture en attente. Autrement dit, la priorité est donnée aux opérations d'écriture.

Composantes conservatives et répétitives stationnaires

■ Analyse et validation

système physique \Rightarrow représenté par les spécifications du cahier des charges.
Le modèle, qui doit être le plus fidèle possible, représente le comportement du système.

L'analyse du modèle sert à extraire les propriétés de ce dernier:

- Graphiquement, sur le graphe des marquages accessibles,
- Analytiquement, à partir des invariants de places et de transitions.

La phase de validation sert à vérifier la conformité des propriétés du modèle avec les spécifications du cahier des charges.

L'intérêt de la validation est qu'elle permet de détecter les erreurs de modélisation, les problèmes de spécification.

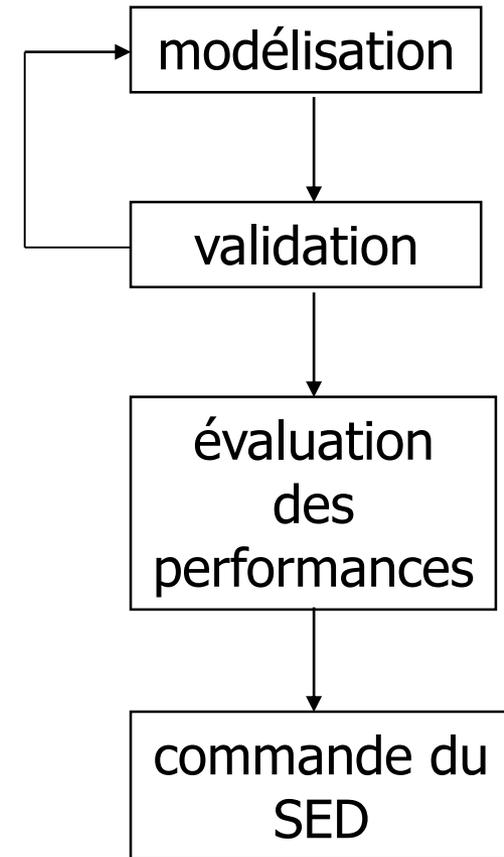
Composantes conservatives et répétitives stationnaires

■ Analyse et validation

Validation graphique \Rightarrow analyse du graphe des marquages accessibles.

INCONVENIENTS :

- dépend du marquage initial,
- difficile à réaliser quand le graphe des marquages accessibles est de grande taille.

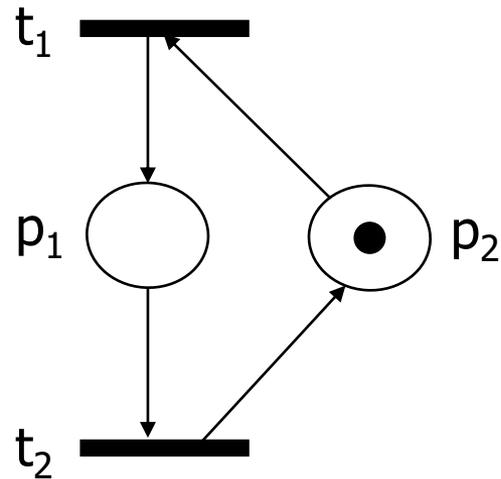


Composantes conservatives et répétitives stationnaires

■ Analyse et validation

Validation analytique

Machine de capacité unitaire



Invariants de places : le jeton est soit dans p_1 , soit dans p_2 , ce qui permet d'écrire $M(p_1) + M(p_2) = 1$. Ce qui veut dire que la machine est soit libre soit occupée.

Invariants de transitions : après chargement de la machine (en vue du traitement d'une pièce), il y aura un déchargement \Rightarrow une séquence répétitive est : $t_1 t_2$.

Composantes conservatives, invariants de places

On cherche des propriétés indépendantes du marquage initial, donc découlant directement de la structure du réseau.

Un invariant linéaire de places est une fonction linéaire du marquage des places, ne dépendant pas du marquage initial du réseau et dont la valeur est une constante. Il correspond à une contrainte sur les états du système qui sera toujours vérifiée, quelles que soient ses évolutions.

Revenons à l'équation fondamentale : $M' = M + C \cdot \bar{S}$,

Soit f^T un vecteur,

$$f^T \cdot M' = f^T \cdot M + f^T \cdot C \cdot \bar{S},$$

La seule façon de se rendre indépendant des séquences de franchissement s , c'est d'annuler le terme $f^T \cdot C$

Composantes conservatives, invariants de places

Une composante conservative d'un RdP est une solution (f étant un vecteur de réels) de l'équation :

$$f^T \cdot C = 0$$
 avec C la matrice d'incidence du réseau.

Une composante conservative, du point de vue graphique, définit un sous-réseau de Petri.

Si f est solution de l'équation précédente, alors la fonction linéaire :

$$f^T \cdot M = f^T \cdot M_0, \forall M \in A(R, M_0)$$

est l'invariant linéaire de place correspondant.

Cette équation dépend du marquage initial alors que la composante conservative en est complètement indépendante.

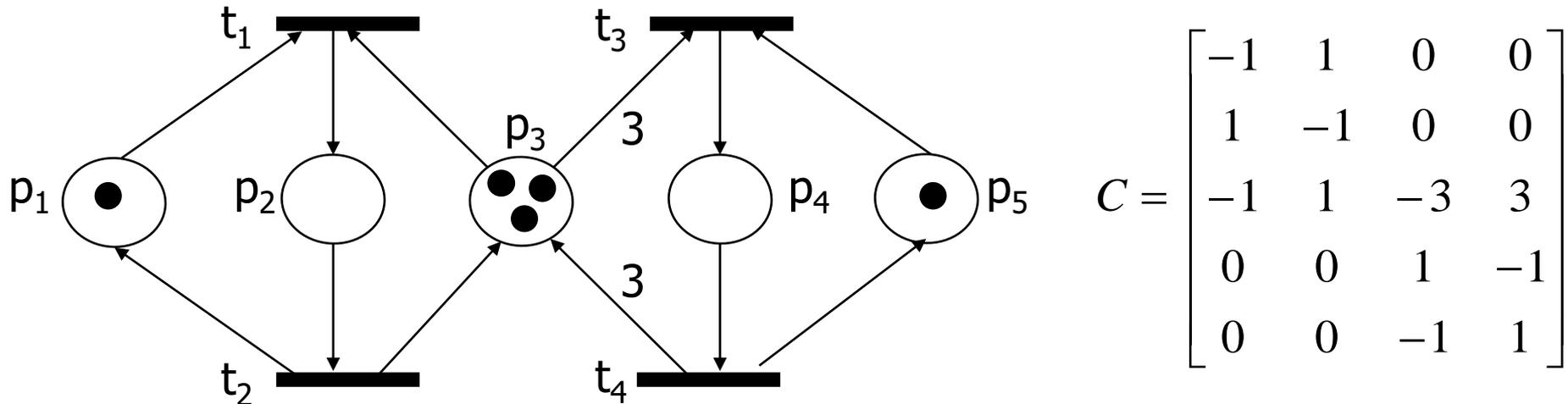
Certains auteurs se restreignent aux solutions positives.

f est appelé p – invariant.

Composantes conservatives, invariants de places

- **Propriétés** : un p-invariant minimal f est tel qu'il n'existe aucun autre invariant f' tel que : $f' \leq f$.
- Tout p-invariant est une combinaison linéaire (à coefficients entiers positifs) de p-invariants minimaux

Exercice : à partir des relations précédentes, déterminer les composantes conservatives et les invariants linéaire de places.



Composantes conservatives, invariants de places

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ posons } F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{bmatrix}$$

$$F^T \cdot C = 0 \Rightarrow \begin{cases} f_1 - f_2 + f_3 = 0 \\ 3 \cdot f_3 - f_4 + f_5 = 0 \end{cases}$$

on en déduit :

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, F_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \end{bmatrix} \text{ et } M_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$F_1^T \cdot M = F_1^T \cdot M_0 \Rightarrow m(p_1) + m(p_2) = 1$$

$$F_2^T \cdot M = F_2^T \cdot M_0 \Rightarrow m(p_4) + m(p_5) = 1$$

$$F_3^T \cdot M = F_3^T \cdot M_0 \Rightarrow m(p_2) + m(p_3) + 3 \cdot m(p_4) = 3$$

Composantes conservatives, invariants de places

- **Propriétés locales :**

chaque p-invariant minimal donne lieu à un invariant de marquage. Cette relation s'interprète par rapport au système physique comme la conservation d'une quantité (nombre de ressources, ...).

- **Propriétés globales :** finitude (bornitude)

S'il est possible de former à partir de p-invariants minimaux une combinaison linéaire comprenant toutes les places du réseau alors le réseau est borné.

En d'autres termes, il suffit que chaque place du réseau apparaisse au moins une fois dans au moins l'un des p-invariants minimaux.

Composantes répétitives, invariants de transition

Un invariant de transition est une séquence de franchissements de transitions qui ne modifie pas le marquage du réseau. Un tel invariant correspond à une séquence cyclique d'événements qui peut être répétée indéfiniment. Tout invariant de transition doit être une séquence s telle que \bar{s} vérifie :

$$C.\bar{S} = 0 \text{ avec } \bar{S} > 0$$

Toute solution de l'équation précédente est appelée composante répétitive stationnaire. Si s est le vecteur caractéristique d'une séquence de franchissements s , effectivement franchissable à partir d'un marquage accessible, alors cette séquence est un **invariant de transitions**.

La composante répétitive stationnaire ne dépend pas du marquage initial, par contre l'existence ou non d'un invariant de transition correspondant en dépend fortement.

Composantes répétitives, invariants de transition

Une séquence répétitive stationnaire est une séquence de franchissements S telle que :

$$M_0[S > M_0$$

La séquence est dite complète si elle contient toutes les transitions du RdP.

On appelle séquence répétitive croissante, une séquence S telle que :

$$M_0[S > M'_0 \text{ avec } M'_0 > M_0$$

On appelle séquence répétitive décroissante, une séquence S telle que :

$$M_0[S > M'_0 \text{ avec } M'_0 < M_0$$

On appelle composante répétitive l'ensemble T' des transitions de T apparaissant dans la séquence S . Le RdP est dit répétitif si $T' = T$.

Si S est une séquence répétitive pour la condition initiale M_0 alors c'est aussi une séquence répétitive pour le marquage initial $M'_0 \geq M_0$

Composantes répétitives, invariants de transition

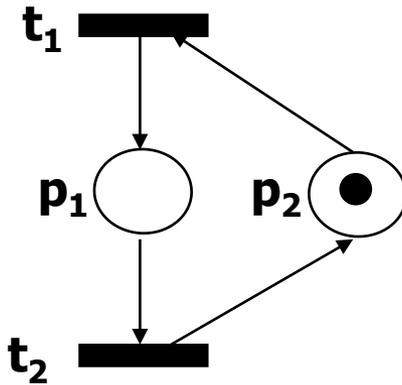
Un réseau n'admet pas forcément de t-invariant.

Propriétés :

- un t-invariant minimal Y est tel qu'il n'existe aucun autre t-invariant Y' tel que $Y' \leq Y$.
- Tout t-invariant est une combinaison linéaire (à coefficients entiers positifs) de t-invariants minimaux.
- Au vecteur caractéristique s on associe des séquences caractérisant le comportement cyclique du réseau. Toutes ces séquences ne sont pas franchissables.
- Un t-invariant n'admet pas forcément une séquence franchissable.

Composantes répétitives, invariants de transition

Exemple : machine de capacité unitaire



$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, M_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il y a un seul t-invariant : $C.Y_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, on obtient $Y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Deux séquences de tir sont associées à cet unique t-invariant :

- t_1t_2 et t_2t_1 , mais à partir de M_0 **seule** t_1t_2 est réalisable (franchissable).

Composantes répétitives, invariants de transition

- **Propriétés globales :**

- **Répétitivité :** Pour chaque t-invariant minimal,

Il faut vérifier qu'il existe au moins une séquence franchissable associée à chaque t-invariant,

Si le réseau admet plusieurs t-invariants, alors chaque transition du réseau doit appartenir à au moins un des t-invariants.

Il est alors possible de former par composition une séquence répétitive complète. Le réseau est alors répétitif.

Propriétés

Théorème : un RdP est répétitif si et seulement si :

$$\exists y > 0, C.y \geq 0$$

Il est partiellement répétitif si le vecteur y contient des éléments égaux à zéro.

Théorème : un RdP est conservatif si et seulement si :

$$\exists x > 0, x^T . C = 0$$

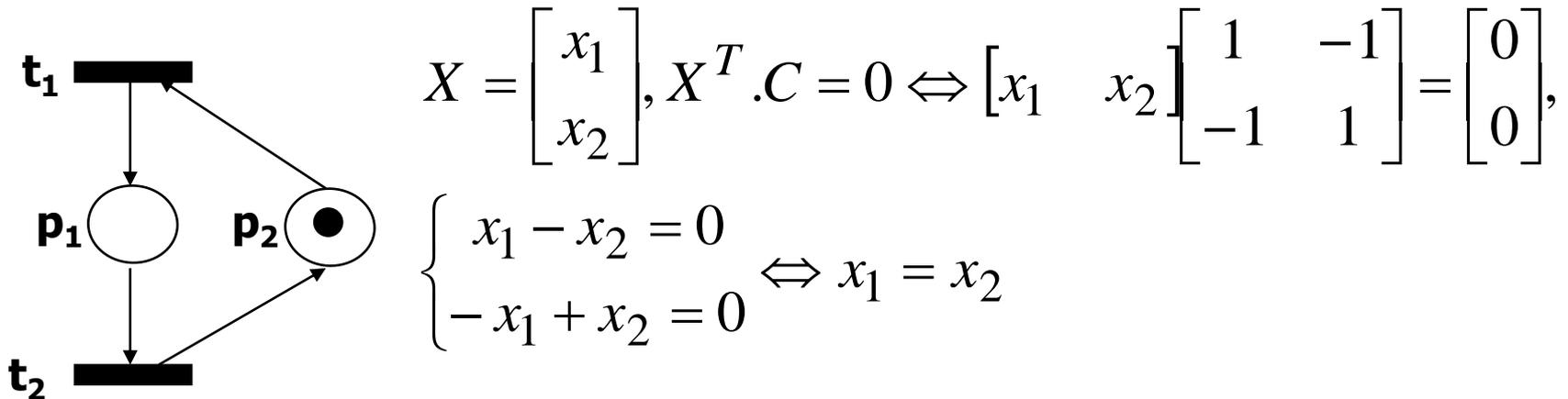
Théorème : un RdP est structurellement borné si et seulement si :

$$\exists x > 0, x^T . C \leq 0$$

Calcul des P et T – invariants :

Le but est de déterminer les invariants minimaux, pour cela, il va falloir résoudre un système d'équations linéaires.

Exemple :



Il existe une infinité de solutions (combinaisons de l'invariant minimal),

P-invariant minimal

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

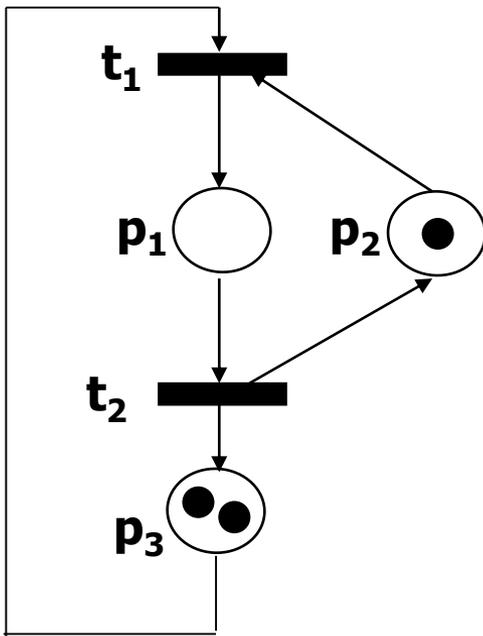
Algorithme de détermination des P – semi-flots :

■ Algorithme de FARKAS :

- Si dans une colonne de la matrice d'incidence, il y a un seul élément non nul, on supprime la colonne et la ligne contenant cet élément non nul,
- Si elle contient un seul élément d'un signe donné, les autres étant nuls ou de l'autre signe, on choisit cet élément comme pivot et on élimine tous les termes de la colonne (sauf le pivot). On peut ensuite éliminer la colonne (et la ligne associée) en se ramenant au cas précédent,
- S'il y a plusieurs éléments positifs et plusieurs éléments négatifs, on prend un élément positif, on l'utilise pour éliminer les éléments négatifs, sauf un, ensuite on prend cet élément (maintenant, le seul négatif) comme pivot (on est donc ramené au cas précédent).

Algorithme de détermination des p – semi-flots :

Exemple : système de production machine/palettes



$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, M_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Unique élément positif
de la première colonne : pivot

$$C = \begin{matrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} l_1 \\ l_1 + l_2 \\ l_1 + l_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On obtient les 2 p-invariants suivants :

$$X_1^T = [1 \quad 1 \quad 0]$$

$$X_2^T = [1 \quad 0 \quad 1]$$

Propriétés mises en lumière à partir des p-invariants :

- **Propriétés locales** : relations d'invariance du marquage

$$X_1^T \cdot M = X_1^T \cdot M_0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow m_1 + m_2 = 1$, la machine est soit libre, soit occupée.

$$X_2^T \cdot M = X_2^T \cdot M_0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow m_1 + m_3 = 2$, les 2 palettes sont soit dans le stock, soit sur la machine.

Propriétés mises en lumière à partir des p-invariants :

■ Propriétés globales :

Le réseau est fini : la combinaison linéaire des invariants de places :

$$\begin{cases} m_1 + m_2 = 1 \\ m_1 + m_3 = 2 \end{cases}$$

fait apparaître toutes les places du réseau $\Rightarrow 2m_1 + m_2 + m_3 = 3$

Détermination des t– semi-flots :

C'est la même démarche que pour les p-semi-flots, à part que les calculs sont effectués sur la matrice transposée de la matrice d'incidence.

$$C^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$l_1 \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow l_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$y_1^T = [1 \quad 1]$$

On obtient un unique t-invariant :

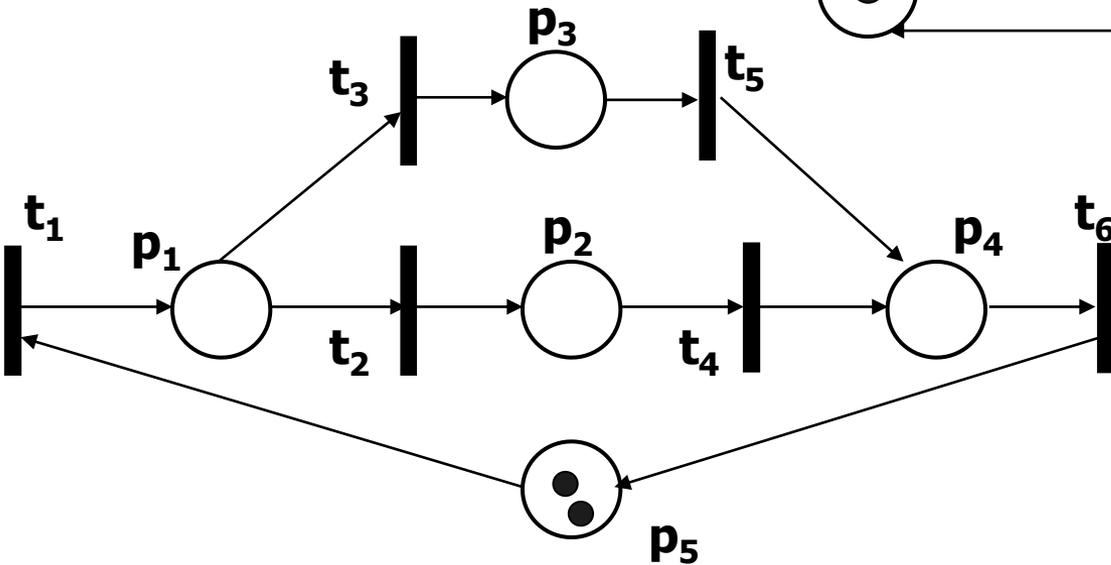
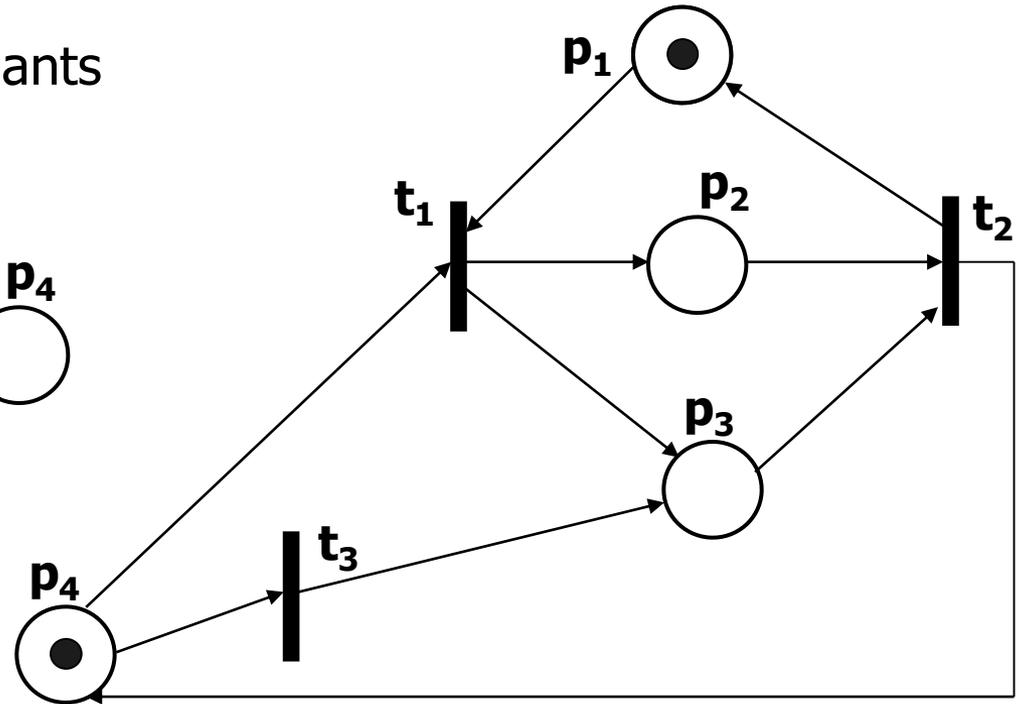
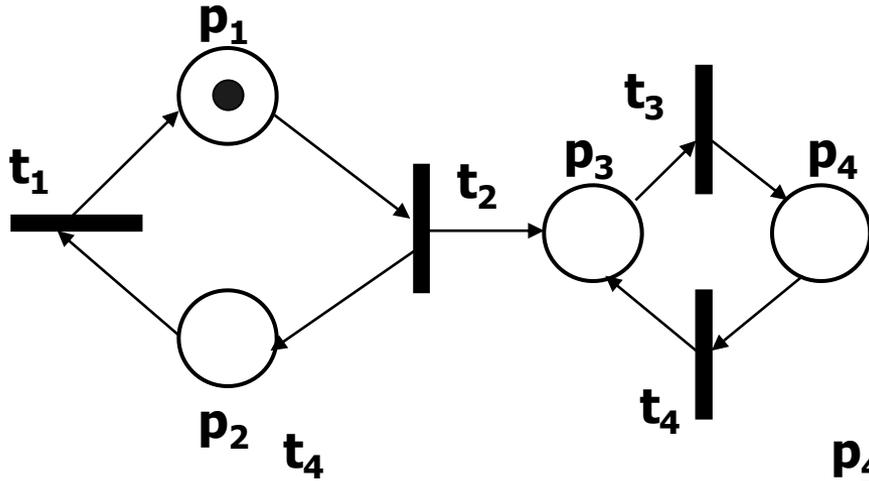
Propriétés mises en lumière à partir des t-invariants :

- **Propriétés globales** : séquences répétitives
 - Deux séquences sont possibles $\sigma_1 = (t_1 t_2)$ ou $\sigma_2 = (t_2 t_1)$, à partir du marquage initial seule σ_1 est réalisable.
 - Le réseau est répétitif, σ_1 est complète, toutes les transitions du réseau y apparaissent.

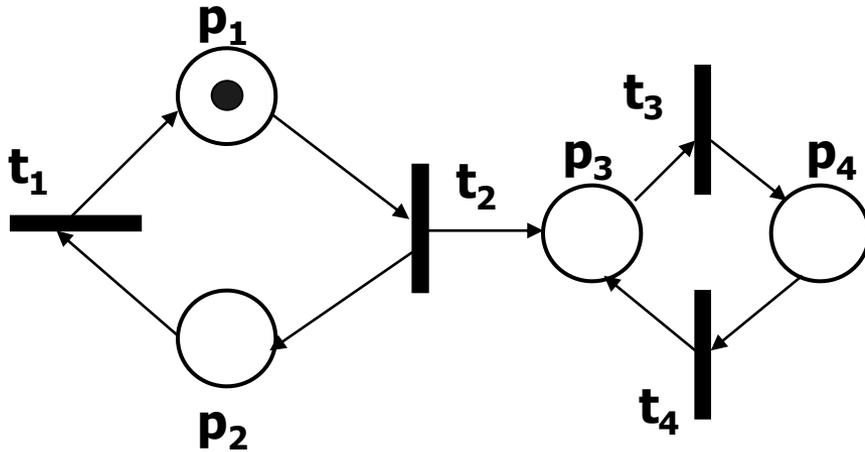
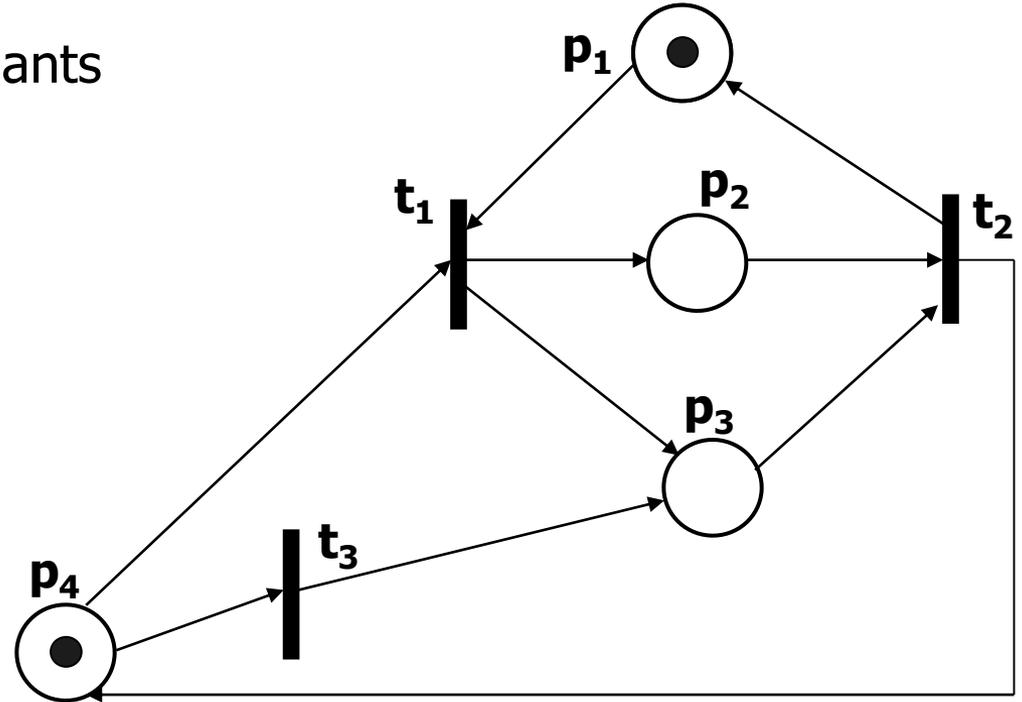
Si dans l'ensemble des t-invariants, une composante est nulle alors il est impossible de revenir au marquage initial en tirant cette transition.

Une séquence de transitions correspondant à un t-semi-flot n'est pas nécessairement franchissable.

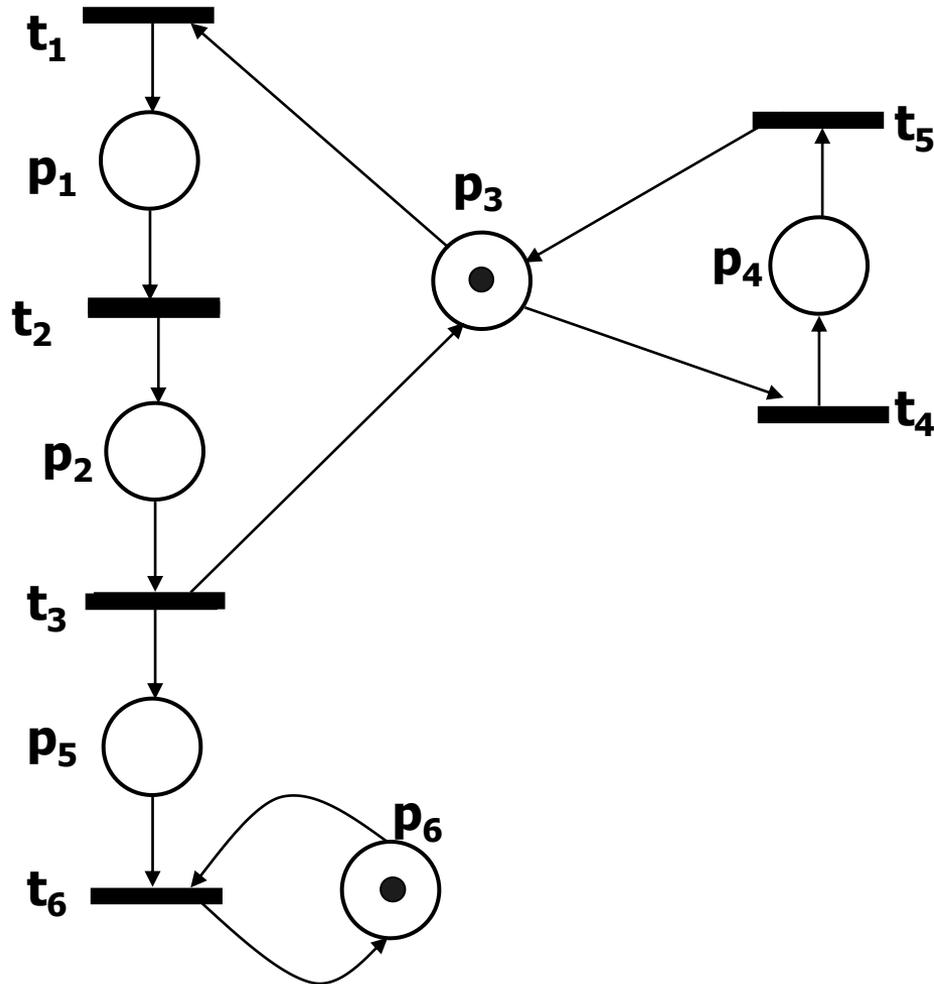
Exercice : calcul des P et T invariants



Exercice : calcul des P et T invariants



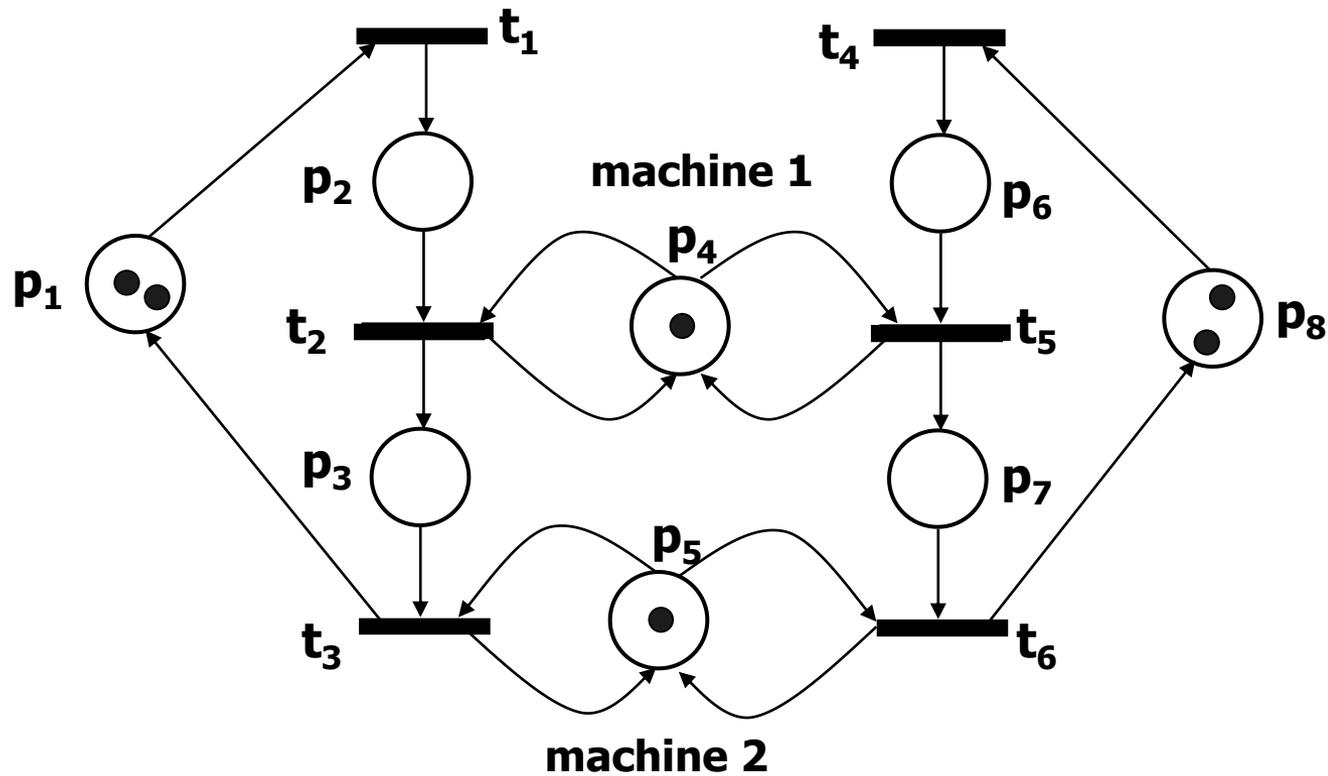
Exercice : calcul des P et T invariants



Exercice : calcul des P et T invariants

Ligne de fabrication 1

Ligne de fabrication 2



Arbre de couverture :

L'algorithme qui permet de décider si un RdP marqué est k -borné est fondé sur la construction d'un arbre appelé arbre de couverture.

- On part du marquage initial,
- Chaque transition franchissable pour ce marquage donne naissance à une branche.
- On calcule les marquages obtenus par le franchissement des transitions et pour chaque marquage obtenu, on recommence.

On arrête la construction d'une branche lorsque :

- On trouve un marquage égal à un marquage déjà rencontré et pour lequel tous les successeurs ont déjà été calculés ou bien vont être calculés.
- On trouve un marquage strictement supérieur à un marquage de la branche en cours d'exploration.

Dans le second cas, on arrête l'exploration de l'arbre car le réseau marqué n'est pas borné. Sinon on continue jusqu'à ce que toutes les branches aient été explorées.

Arbre de couverture :

Pour éviter d'aboutir à un arbre qui se développe indéfiniment, on décide :

- Un marquage qui a été trouvé à un niveau précédent de l'arborescence est marqué par « old ». Un nœud ainsi marqué sera alors une feuille de l'arborescence (on ne cherchera pas ses descendants).
- Si un marquage M' obtenu à un niveau donné est tel qu'il existe sur le chemin qui mène de la racine M_0 à M' , un marquage M tel que $M'(p) \geq M(p)$ pour toutes les places du réseau et si $M'(p) > M(p)$ pour au moins une place, alors le marquage de cette place est marqué « ω ».

Ce symbole peut se comprendre comme représentant l'infini.

Ce marquage restera ω dans tous les développements suivants et le premier point précédent s'applique aussi aux marquages contenant ce symbole.

$$\text{soit } n \in \mathbb{N}, \omega + n = \omega, \omega - n = \omega$$

$$n < \omega \text{ et } \omega \leq \omega$$

Arbre de couverture :

- Un nœud correspondant à un marquage tel qu'aucune transition n'est tirable sera marqué « dead-end » et constituera une feuille de l'arborescence,
- Tous les nœuds qui ne sont pas marqués « old » et qui admettent au moins un descendant sont marqués « new ».

Compte tenu des règles énoncées précédemment, l'algorithme de construction de l'arbre de recouvrement peut s'écrire comme suit :

Algorithme de construction de l'arbre de couverture [Proth et Xie]:

1. On initialise l'arborescence par sa racine qui représente le marquage initial et on marque ce nœud par « new »,
2. TANT QU'il existe un nœud marqué « new »,
 - a. Sélectionner un nœud A marqué « new ». Soit M son marquage
 - b. Si sur le chemin conduisant de la racine à A, il existe un nœud B dont le marquage est M alors A est marqué « old ».
on retourne en 2.
 - c. Si aucune transition n'est tirable pour M, alors le nœud A est marqué « dead-end ».
on retourne en 2.
 - d. Si au moins une transition est tirable pour M alors :

Algorithme de construction de l'arbre de couverture :

POUR chaque transition tirable t faire :

- i. Calculer le marquage M' dérivé de M par le franchissement de t . M' correspond au nœud C .
- ii. Si sur le chemin conduisant de la racine au nœud C , il existe un nœud D représentant M'' tel que :
$$M'(p) \geq M''(p) \text{ pour toute place } p,$$

et $M'(p) > M''(p)$ pour au moins une place p alors faire :
$$M'(p) = \omega \text{ pour tout } p \text{ tel que } M'(p) > M''(p),$$
- iii. Ajouter le nœud C à l'arborescence et ajouter l'arc de A à C étiqueté par t ,
- iv. Si un nœud déjà construit représente M' alors on marque C par « old » sinon par « new »,

FIN POUR.

e. On retourne en 2.

FIN TANT QUE

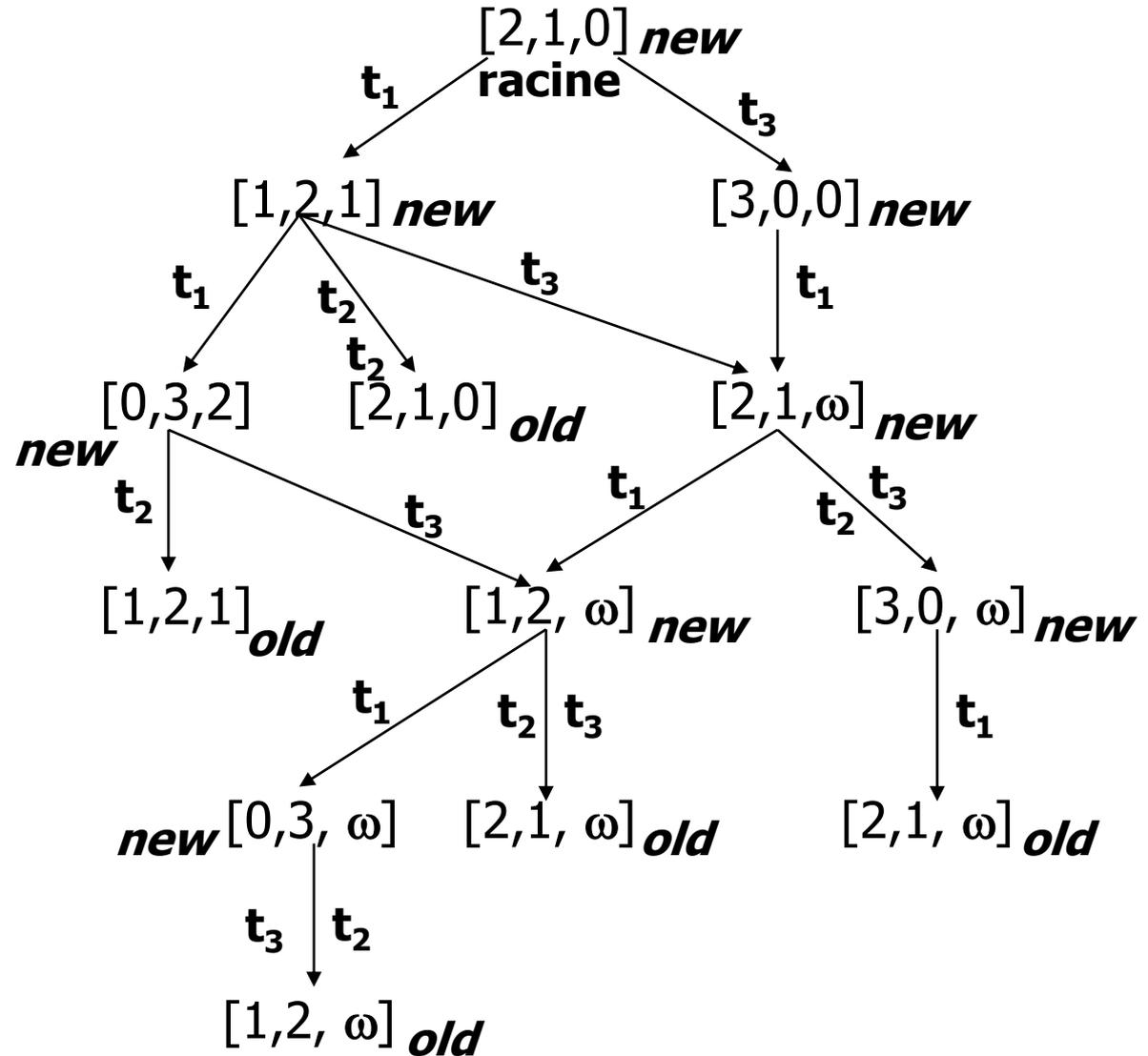
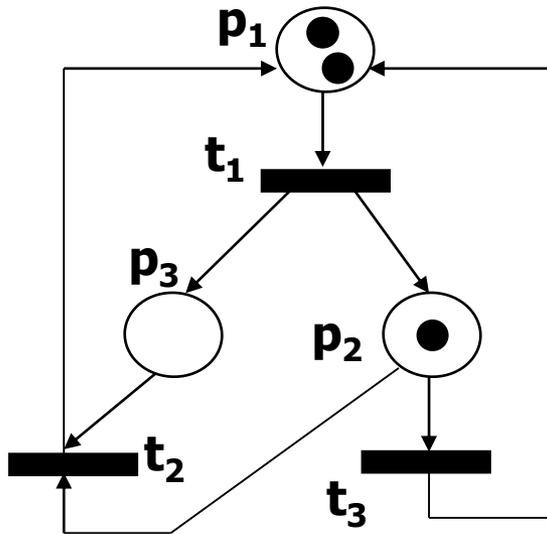
Algorithm 1 (Reachability graph). *Let $\langle N, M_0 \rangle$ be a marked net with incidence matrix C .*

1. *The root node is M_0 . This node has initially no label.*
2. *Let us consider a node M with no label.*
 - (a) *For each transition t enabled at M :*
 - i. *Let $M' = M + C(\cdot, t)$.*
 - ii. *If there does not exist a node M' in the graph, add it.*
 - iii. *Add an arc t from M to M' .*
 - (b) *Label the node M "old".*
3. *If there are nodes with no label, goto step 2.*
4. *Remove all labels from nodes.*



Arbre de couverture :

Exemple :



Arbre de couverture :

Conclusions :

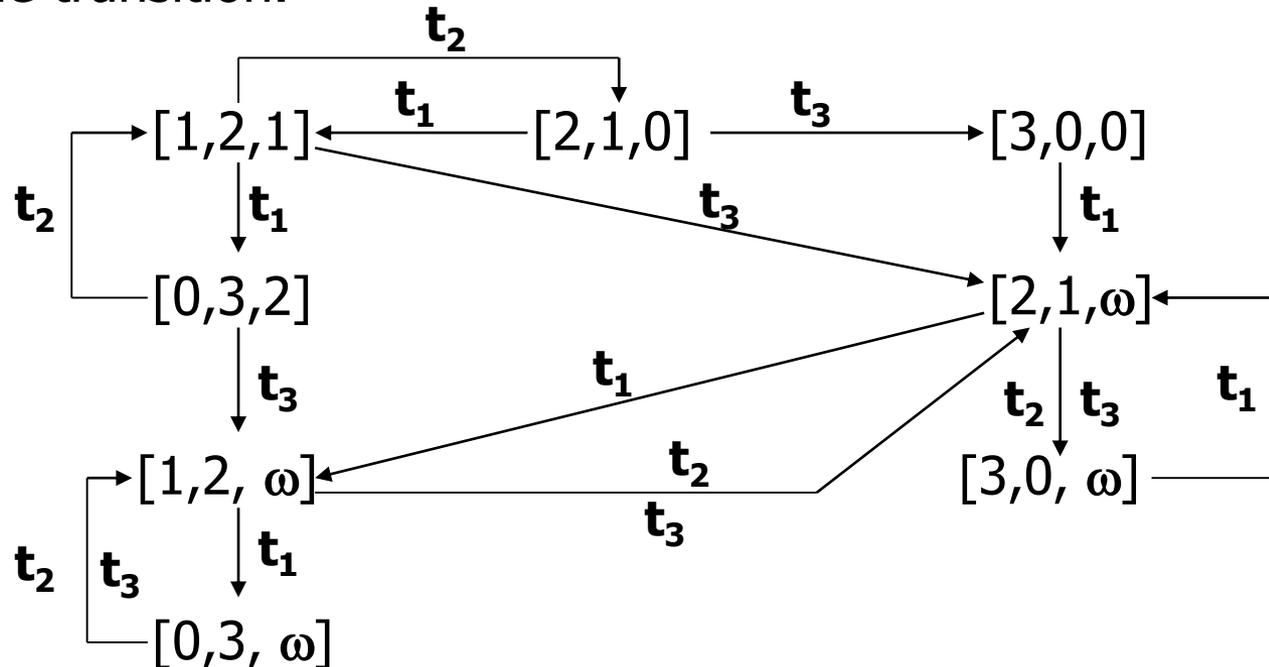
- Un RdP est borné si et seulement si aucun des marquages correspondant aux nœuds de l'arbre de recouvrement ne contient le symbole ω .
- l'arbre de recouvrement permet de détecter les transitions qui ne sont pas tirées, ou qui ne sont plus tirées à partir d'un certain niveau. Cela permet de mettre en évidence les fonctionnalités d'un système de production qui ne sont pas actives, ou qui deviennent inactives au bout d'un certain temps, pour certains états initiaux du système.
- Quand le système est borné, l'arbre de recouvrement donne l'ensemble des états atteints.

Arbre de recouvrement/graphes de recouvrement :

A la notion d'arbre de recouvrement est associée la notion de graphe de recouvrement, qui est un graphe dont les nœuds sont les nœuds libellés « new » dans l'arbre de recouvrement, et dont les arcs sont définis de la manière suivante :

- Un arc joint le nœud A au nœud B si et seulement si le marquage associé à B est déduit du marquage associé à A par le franchissement d'une unique transition.

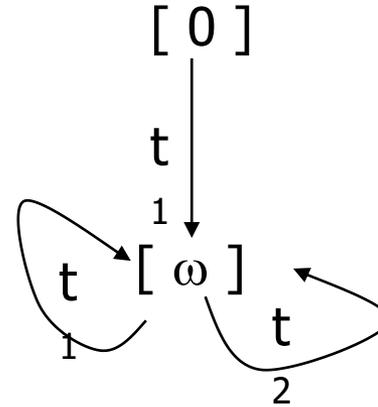
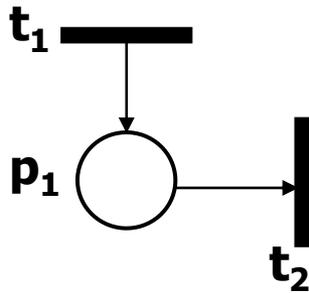
Exemple :



Arbre de recouvrement/graphe de recouvrement :

Dans le cas d'un graphe des marquages de dimension infinie, le graphe de couverture ne permet pas d'analyser la vivacité. L' introduction du symbole ω correspond à une perte d'information.

Exercice : graphe de recouvrement.



$t_1 t_2 t_2$ étiquette bien un chemin du graphe de recouvrement et pourtant cette séquence de transitions est non réalisable, à partir du marquage initial.

Limitations du graphe de couverture :

D'une manière générale, ce graphe ne permet pas de répondre à des questions concernant

- L'accessibilité d'un marquage,
- La vivacité du réseau, (voir exemples qui suivent)

Mais dans certains cas OUI..

Composante fortement connexe d'un graphe : sous-graphe tel qu'il existe un chemin orienté entre tout sommet A et tout sommet B de ce sous-graphe,

Arc sortant d'une composante fortement connexe : arc qui a pour sommet origine un sommet de cette composante et comme extrémité un sommet qui n'appartient pas à cette composante.

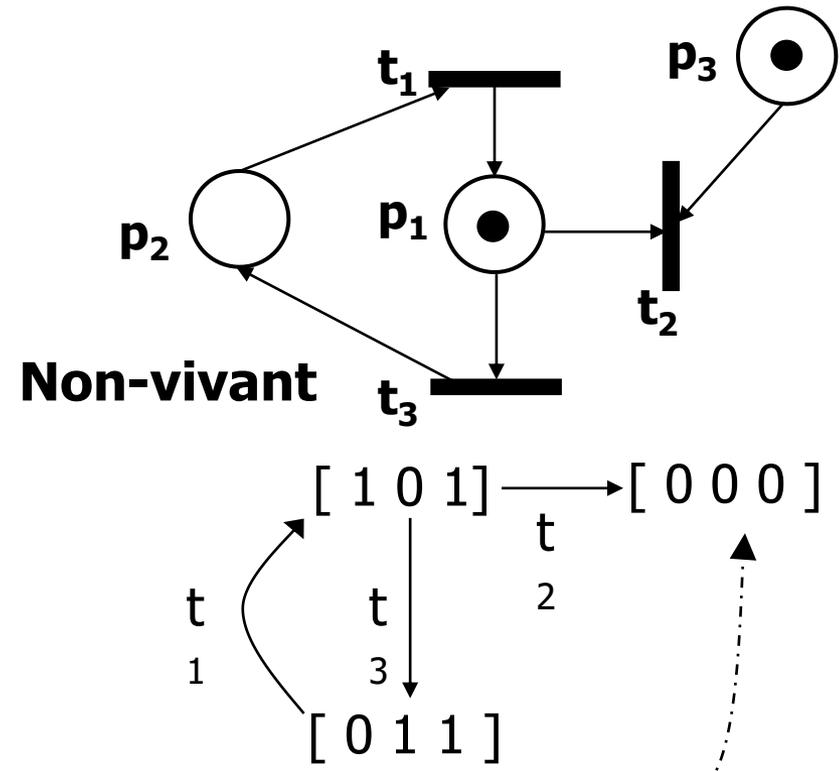
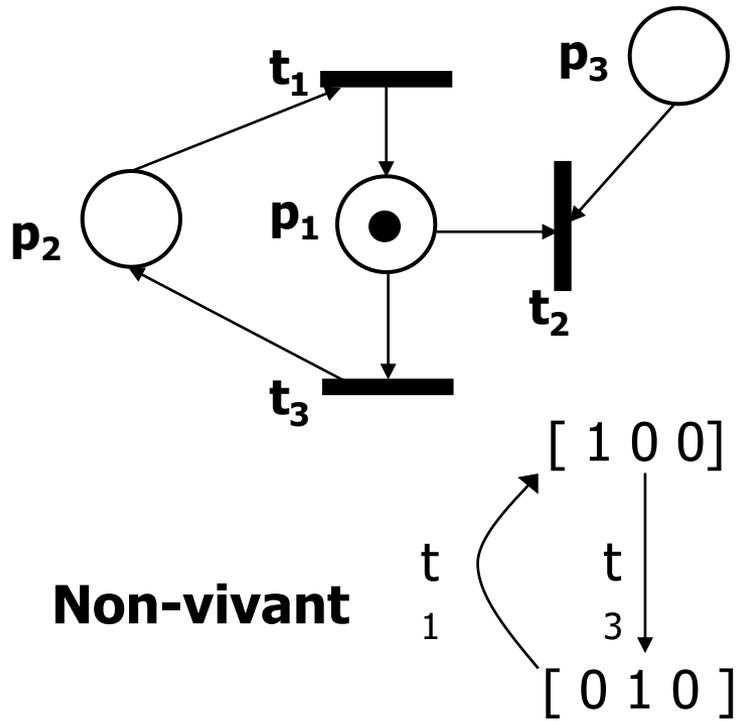
Réseau borné et vivacité

- Une transition t d'un RdP borné est vivante si et seulement si, partant d'un nœud quelconque du graphe des marquages accessibles, il existe un chemin orienté contenant un arc marqué avec t ,
- La transition t est vivante si et seulement si chaque composante fortement connexe et sans arc sortant du graphe des marquages accessibles contient un arc marqué avec t ,
- Un RdP borné est vivant si et seulement si chaque composante fortement connexe du graphe des marquages accessibles qui n'a pas d'arc sortant contient au moins un arc marqué par chaque transition,
- Un RdP borné est sans blocage si et seulement si chaque nœud de son graphe des marquages accessibles est origine d'au moins un arc,
- Un RdP admet un marquage d'accueil M si et seulement si le graphe des marquages accessibles comporte une unique composante fortement connexe terminale (les seuls sommets accessibles sont ceux de la composante), qui contient M .

Réseau non borné et vivacité

- (CS) Une transition t d'un RdP non borné n'est pas vivante si le graphe de couverture possède une composante fortement connexe sans arc sortant dans laquelle aucun arc n'est marqué par t ,
- (CS) Un RdP non borné n'est pas vivant si son graphe de couverture possède au moins une composante fortement connexe sans arc sortant et dont l'union des transitions attachées aux arcs n'est pas l'ensemble des transitions
- (CS) Un RdP non borné est avec blocage si son graphe de couverture contient un nœud qui n'est l'origine d'aucun arc,
- Un RdP est quasi-vivant si et seulement si toutes les transitions apparaissent dans le graphe de couverture,
- Un RdP admet un régime permanent si et seulement si le graphe de couverture admet un circuit.

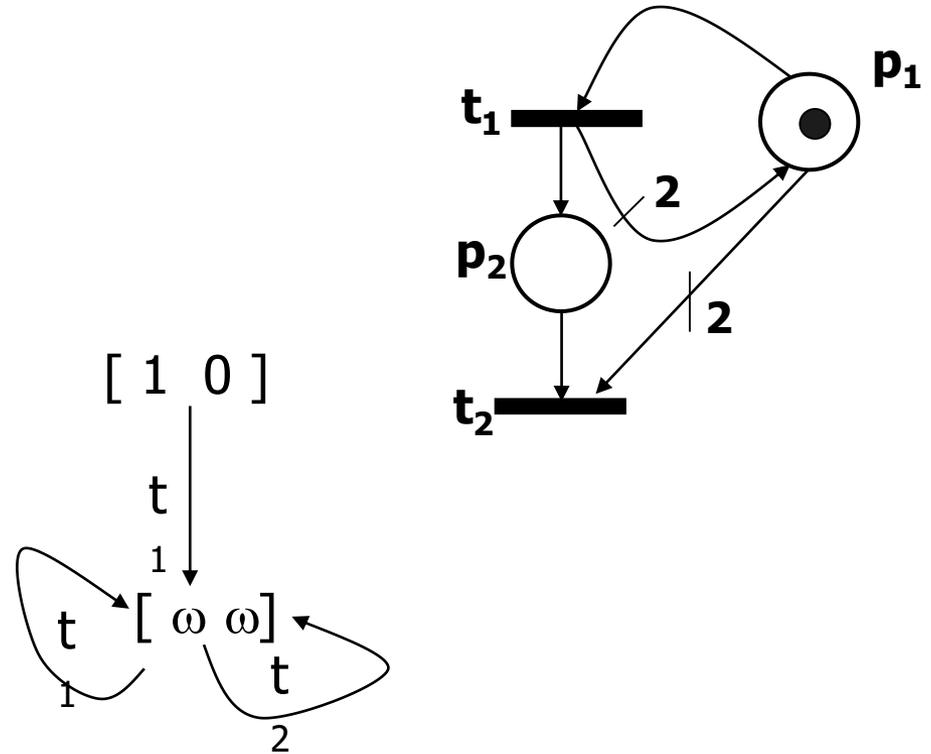
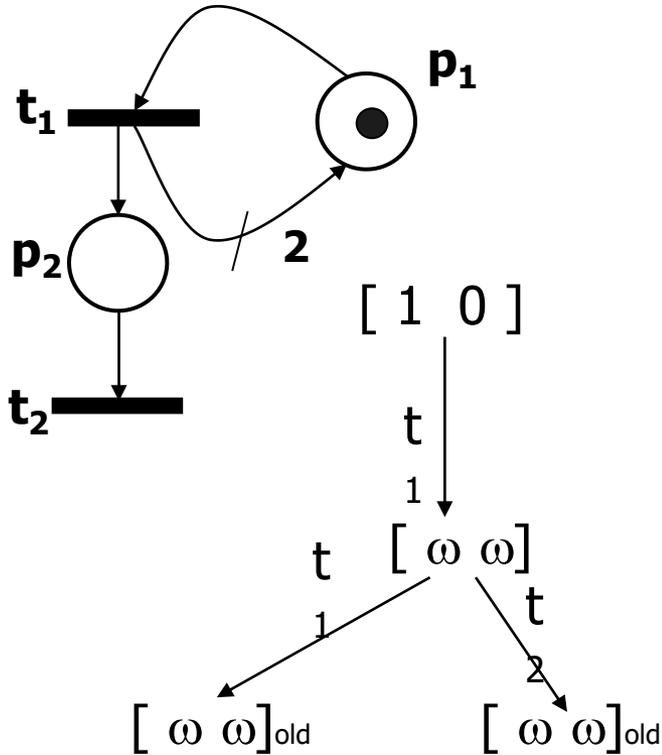
Blocage \Rightarrow Non- vivacité (l'inverse est faux !!!!!) MAIS l'absence de blocage n'implique pas vivacité



Blocage car origine d'aucun arc

la transition t_2 ne sera jamais tirée et pourtant il y a absence de blocage.

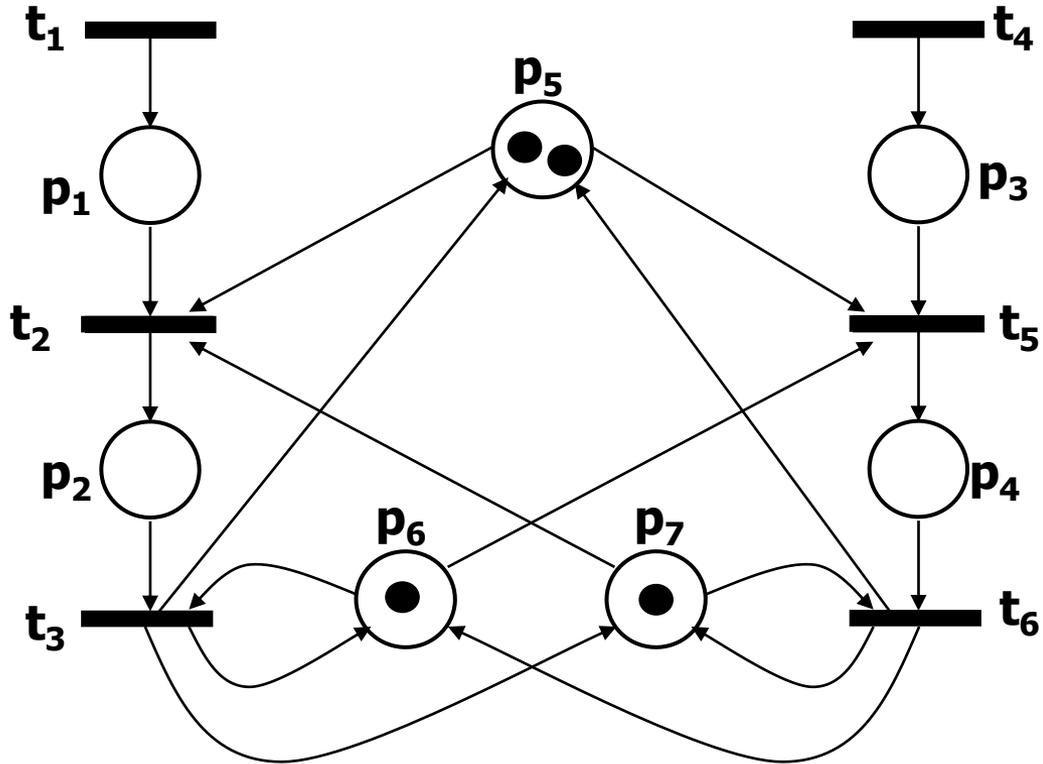
Exercice : arbre et graphe de recouvrement.



Même arbre et graphe de recouvrement et pourtant :
non borné et **vivant**

non borné et **non vivant !!!**

Exercice : graphe de recouvrement.



Evaluation de performances :

■ LE TEMPS :

représente la durée d'une opération :

- temps de fabrication d'une pièce,
- temps de transport sur un convoyeur.

■ LES MODELES :

RdP temporisés :

Association d'une durée d aux places (RdP P-temporisé), aux transitions (RdP T-temporisé) ou aux arcs

- ✓ la durée d est la durée minimum de l'opération ; la durée maximale n'est pas spécifiée.

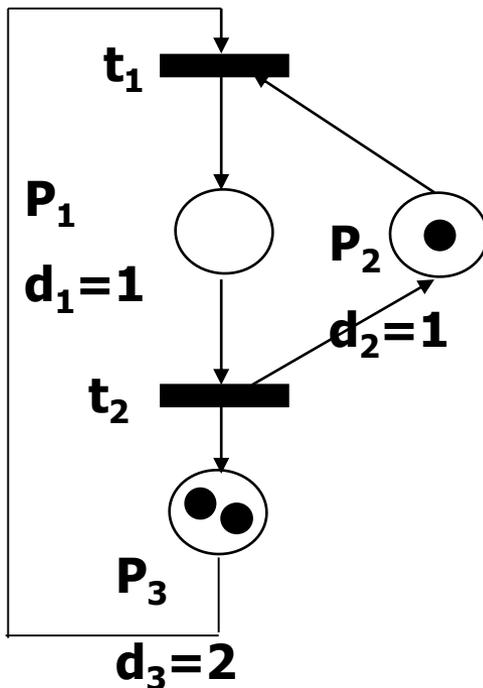
RdP temporels :

Association d'un intervalle $[a, b]$ aux places (RdP P-temporel), aux transitions (RdP T-temporel) ou aux arcs.

- ✓ la durée a est la durée minimum de l'opération, la durée b est sa durée maximale.

Evaluation de performances :

Exemple : système de production machine/palettes



Spécifications sur les durées d'opération :

- L'usinage a une durée de 1 unité de temps,
- Entre deux pièces consécutives, un réajustement de durée 1 unité de temps, est effectué,
- Le retour des palettes prend 2 unités de temps.

Traduction sur le modèle RdP P-temporisé :

- L'usinage est associé à la place p_1 (machine occupée),
- Le réajustement est associé à la place p_2 (machine libre),
- Le retour palette est associé à la place p_3 (palettes disponibles en entrée).

Evaluation de performances :

LES RdP P-TEMPORISES

■ DEFINITION

- ✓ Un RdP P-temporisé est un doublet $\langle R, \text{Tempo} \rangle$:
 - ✓ R est un réseau de Petri
 - ✓ Tempo est une application :
 - ✓ $P \rightarrow R^+$
 - ✓ $p_i \rightarrow \text{Tempo}(P_i) = d_i$, correspond à la temporisation associée à la place p_i .

La durée s'exprime en unités de temps (U.T.)

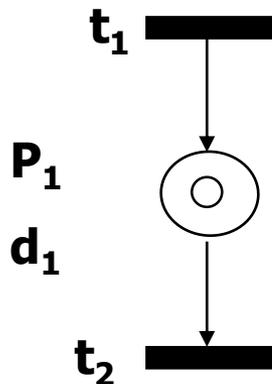
Evaluation de performances :

LES RdP P-TEMPORISES

Il y a deux états possibles pour une marque :

Si la marque est arrivée dans la place à l'instant t_{in} .

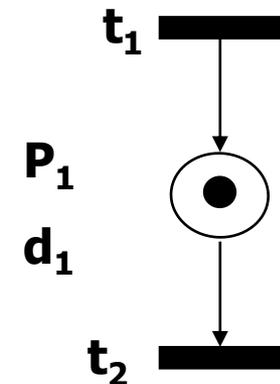
marque **indisponible**



$$t_{in} \leq t \leq t_{in} + d_1$$

tâche en cours d'exécution

marque **disponible**



$$t > t_{in} + d_1$$

tâche terminée

Evaluation de performances : RdP P-temporisés

Représentation d'un état :

Le marquage M est formé de deux composantes : $M = M_i + M_d$

- M_i : marquage associé aux marques indisponibles,
- M_d : marquage associé aux marques disponibles.

Convention : à l'instant initial les marques sont disponibles.

Vecteur de marquage :

$$M[m \times 1] = \begin{bmatrix} \dots \\ m_i (d_{mk}) \\ \dots \end{bmatrix}$$

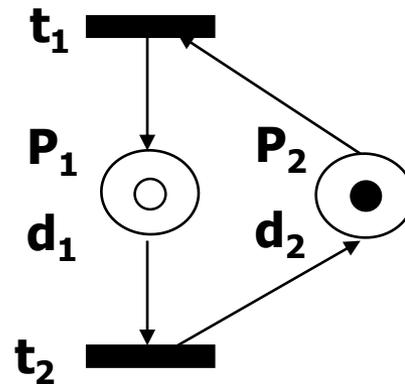
m est le nombre de places du réseau,

m_i est le nombre de marques dans la place p_i ,

d_{mk} : durée résiduelle d'indisponibilité de chaque marque de la place p_i .

Evaluation de performances : RdP P-temporisés

Exemple : deux machines identiques de capacité unitaire.



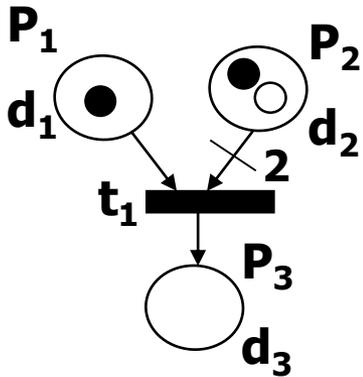
La marque vient d'arriver dans la place p_1 .

$$M = \begin{bmatrix} 1(d_1) \\ 1(0) \end{bmatrix}$$

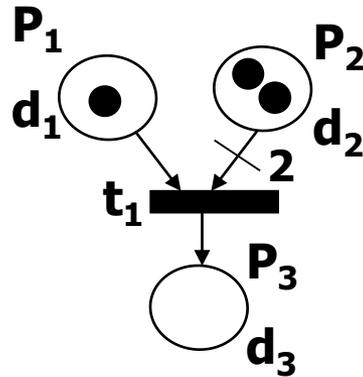
Evaluation de performances : RdP P-temporisés

Évolution du graphe :

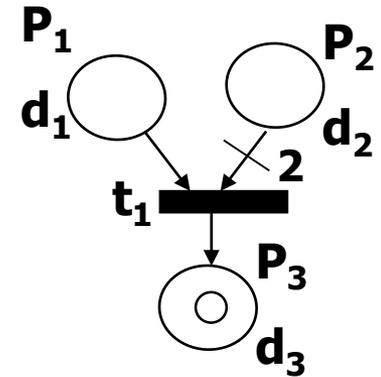
Une transition t_1 est validée pour un marquage si elle est validée pour l'ensemble des jetons disponibles (M_d).



t_1 non validée



t_1 validée



après franchissement de t_1

Evaluation de performances : RdP P-temporisés

Évolution du graphe

- **Validation :**

seules les marques disponibles sont à considérer,

- **Franchissement :**

la durée d'un franchissement est infiniment petite,

parmi n transitions validées, une et une seule peut être franchie à la fois,

toute transition validée n'est pas obligatoirement franchie,

- **Calcul des marquages :**

le calcul du marquage après franchissement est le même que pour les RdP autonomes.

Evaluation de performances : RdP P-temporisés

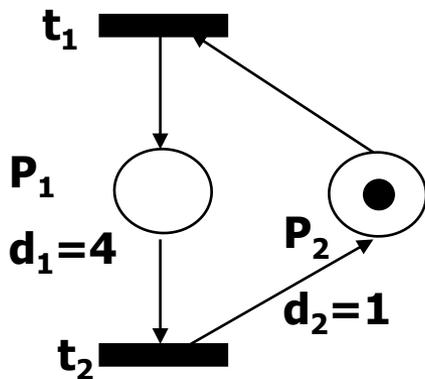
Évolution du graphe

Vitesse maximale : le fonctionnement en vitesse maximale permet d'atteindre les meilleures performances.

Politique de franchissement :

fonctionnement au plus tôt : dès qu'une transition est validée, elle est franchie. C'est une politique possible pour atteindre la vitesse maximale.

Exemple : machine de capacité unitaire.



Fonctionnement en vitesse maximale



Graphes des marquages en vitesse maximale :

- **Arcs orientés et étiquettes :** $\xrightarrow{t / d_k}$

Les arcs seront étiquetés par le nom des transitions permettant de passer d'un marquage à un autre et de la durée d_k séparant l'instant d'occurrence de ces deux événements.

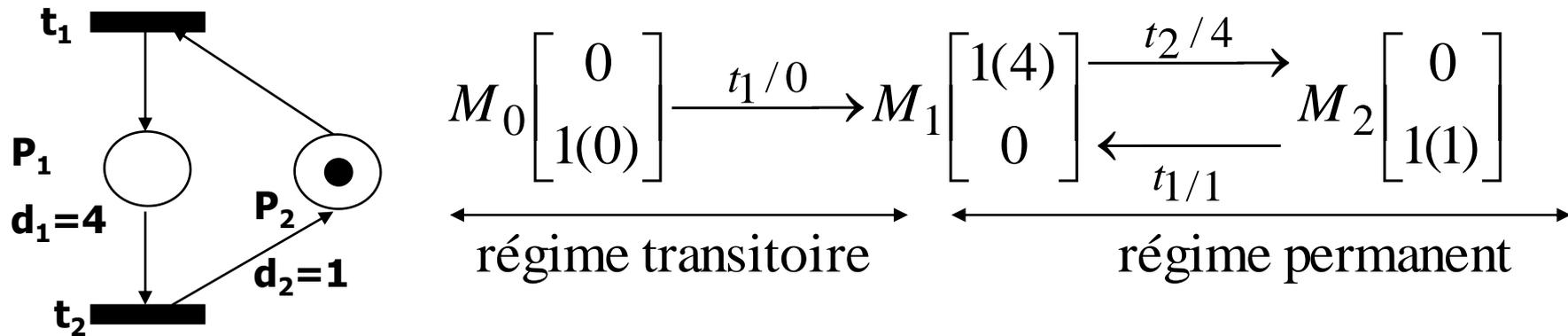
- **Sommets :**

Marquage M ($M \in A(R, M_0)$),

Les marques disponibles ne sont pas distinguées des marques indisponibles,
La durée d'indisponibilité résiduelle est précisée pour chaque marque.

Graphe des marquages en vitesse maximale :

Exemple : machine de capacité unitaire.



En régime permanent :

- durée d'un cycle : 5 unités de temps,
- fréquence de franchissement de t_2 : $1/5$,

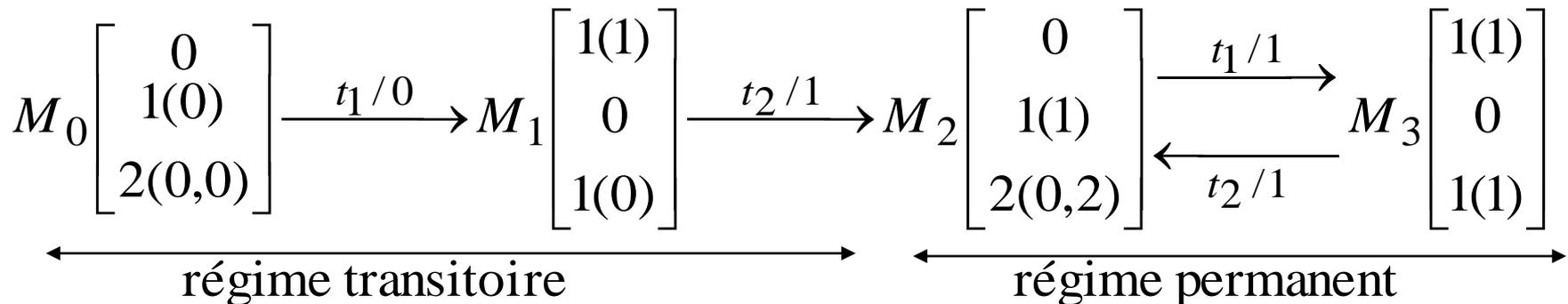
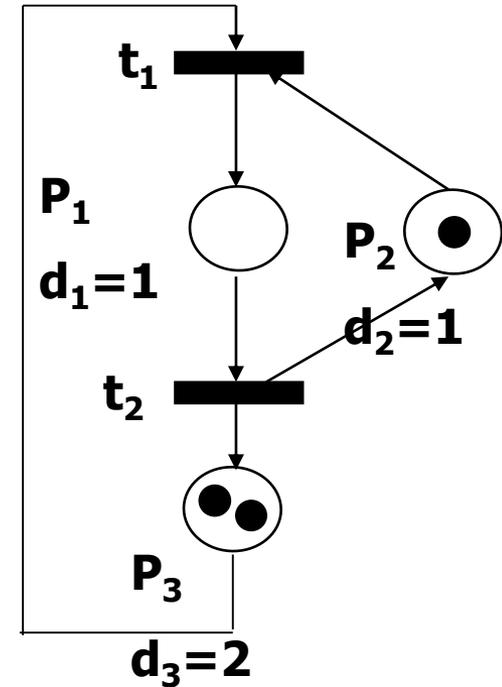
Interprétation :

- le taux de production de la machine est d'une pièce toutes les 5 unités de temps.

Grphe des marquages en vitesse maximale :

Exemple : système de production machine/palettes.

- **durée d'un cycle :** 2 unités de temps,
- **fréquence de franchissement de t_2 :** $1/2$,
- **interprétation :** le taux de production est d'une pièce toutes les 2 unités de temps.



Etude du régime permanent :

- **définition :**

Le fonctionnement à vitesse maximum d'un RdP P-temporisé borné conduit à un fonctionnement périodique (cyclique) au bout d'un temps fini,

- **évaluation des performances :**

elle se fait par l'étude du franchissement des transitions qui établit ce graphe cyclique et leur fréquences de franchissement,

- évaluation d'un taux de production,
- évaluation d'un nombre de ressources nécessaires pour respecter un taux de production prévu,
- évaluation de temps opératoires.

Etude du régime permanent :

■ fréquence de franchissement :

nombre moyen de franchissements par unité de temps d'une transition en régime permanent,

■ Calcul :

la détermination des fréquences de franchissement nécessite :

- L'évaluation du nombre moyen de marques dans chaque place,
- La résolution d'un système d'inéquations et d'équations,

■ Remarque :

Ce problème n'admet pas toujours de solution,

Les valeurs calculées sont des valeurs moyennes en régime permanent. Cela permet une première approche du problème mais une analyse plus fine peut souvent être nécessaire.

Etude du régime permanent :

Soient C et $Post$ la matrice d'incidence et la matrice d'incidence arrière associées au RdP.

Soient f_i les q p -semi flots élémentaires associés à C .

Soit D la matrice diagonale telle que $D_{ii} = d_i$ où d_i est la temporisation associée à la place p_i .

Alors le vecteur $F = [F_j]$ des fréquences de franchissement est solution de :

$$C.F = 0 \text{ et } \forall i \in \{1, \dots, q\}, f_i^T . M_0 \geq f_i^T . D.Post.F$$

Démonstration : Soit

- M_t le marquage du RdP P -temporisé à l'instant t ,
- un temps t_2 suffisamment plus grand qu'un temps t_1 , avec t_1 assez grand pour être dans le fonctionnement périodique,
- s le vecteur caractéristique de la séquence de franchissement permettant de passer du marquage M_1 au marquage M_2 .

Etude du régime permanent :

D'après l'équation fondamentale, on a : $M_2 = M_1 + C.\bar{S}$,

Or, $F = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \bar{s}$, et par suite : $M_2 = M_1 + (t_2 - t_1).C.F$,

Après un régime transitoire, le fonctionnement devient périodique, il existe donc $t_2 > t_1$ tel que $M_2 = M_1$. Ainsi :

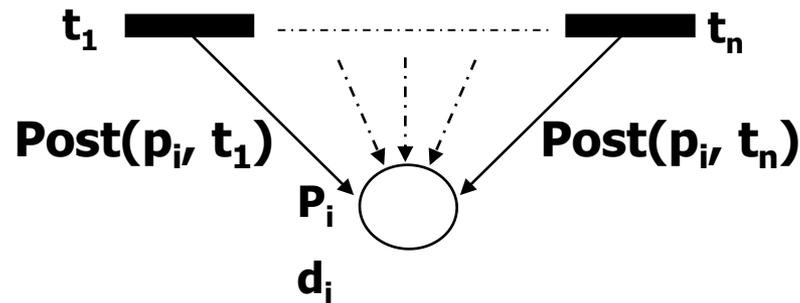
$$C.F = 0$$

Pour la place p_i , on peut définir le nombre moyen de marques lors d'un fonctionnement en régime périodique.

Etude du régime permanent :

Nombre moyen de marques indisponibles = nombre moyen de marques dans chacune des places du réseau en régime permanent en vitesse maximale.

Exemple :



le nombre moyen de marques dans la place p_i est égal au flux de marques entrant dans cette place (ou au flux de marques sortant).

$$\overline{M(p_i)} = d_i \cdot Post(p_i, t_1) \cdot f_1 + \dots + d_i \cdot Post(p_i, t_n) \cdot f_n$$

\Leftrightarrow

$$\overline{M(p_i)} = d_i \sum_{u=1}^n Post(p_i, t_u) \cdot f_u$$

Etude du régime permanent :

De plus, le fait que chaque marque reste au moins d_i unités de temps dans la place p_i , on obtient :

$$\overline{M}(p_i) \geq d_i \cdot \text{Post}(p_i, \cdot) \cdot F$$

$\text{Post}(p_i, \cdot)$ est la ligne associée à la place p_i dans la matrice Post ,

$\text{Post}(p_i, \cdot) \cdot F$ est le nombre de marques déposées dans la place p_i , par unités de temps.

d_i étant le temps minimum qu'une marque passe dans la place p_i , le nombre moyen de marques dans p_i sera donc au minimum de $d_i \cdot \text{Post}(p_i, \cdot) \cdot F$,

Chaque marque peut rester dans la place p_i une durée supérieure ou égale à d_i d'où la relation obtenue précédemment.

L'ensemble des inégalités peut s'écrire :

$$\overline{M} \geq D \cdot \text{Post} \cdot F$$

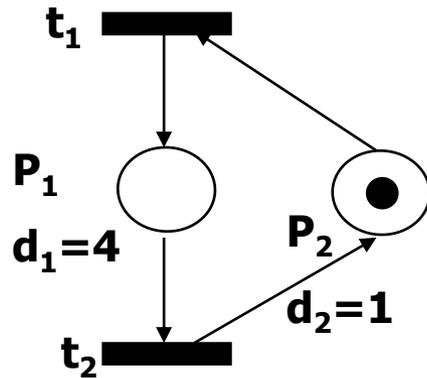
Etude du régime permanent :

Si X_i est un p-semiflot, on a : $X_i^T \cdot \overline{M} = X_i^T \cdot M_0$,

On obtient donc : $X_i^T \cdot \overline{M} = X_i^T \cdot M_0 \geq X_i^T \cdot D.Post.F$

Etude du régime permanent :

Exemple : machine de capacité unitaire.



les matrices :

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}, Post = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

Calcul du marquage moyen :

$$\overline{M} = D.Post.F$$

$$\overline{M} = D \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

\Leftrightarrow

$$\overline{M} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 f_1 \\ d_2 f_2 \end{bmatrix}$$

Calcul des fréquences de franchissement :

■ Étape 1 : Etablir autant d'inéquations que de p-invariants :

$$X_i^T . D.Post.F \leq X_i^T . M_0$$

En effet, à partir des P-invariants :

- Si le réseau est borné, le marquage moyen doit vérifier les invariants de marquage,

- Fonctionnement en vitesse maximale : $X_i^T . \overline{M} = X_i^T . M_0$,
Les fréquences obtenues sont les fréquences maximum que le système peut atteindre.

- Fonctionnement en vitesse quelconque (inférieure à la vitesse maximale) : $X_i^T . \overline{M} \leq X_i^T . M_0$,

Les fréquences obtenues sont inférieures aux fréquences en vitesse maximale.

Calcul des fréquences de franchissement :

- **Étape 2 : Etablir des équations représentant l'évaluation relative des fréquences de franchissement entre elles :**

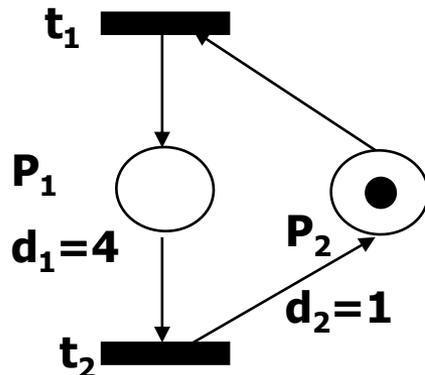
$$f_j = \alpha f_i$$

En effet, à partir des T-invariants :

- Si le réseau est borné, il atteint un comportement cyclique en régime permanent. Il existe une (des) séquence(s) de tir répétitive(s) si σ_i est un (des) T-invariants Y_i associé(s) à cette (ces) séquence(s).

Il est possible d'évaluer relativement les fréquences entre elles.

Exemple :



$$C.F = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow f_1 = f_2 = f$$

Calcul des fréquences de franchissement :

- **Étape 3 : résoudre un système d'équations et d'inéquations obtenu aux étapes 1 et 2.**

Evaluation des performances :

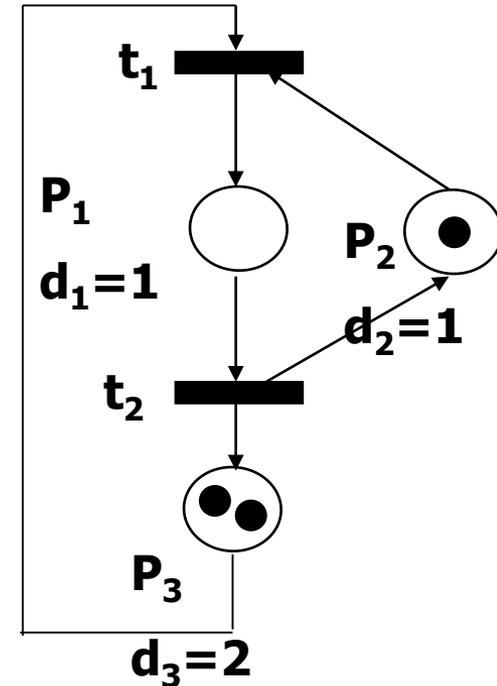
Exemple : système de production machine/palettes.

Calcul du marquage moyen :

$$\bar{M} = D.Post.F$$

$$\bar{M} = D \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \bar{M} = \begin{bmatrix} d_1 \cdot f_1 \\ d_2 \cdot f_2 \\ d_3 \cdot f_2 \end{bmatrix}$$



Evaluation des performances :

Exemple : système de production machine/palettes.

■ Etape 1 : inéquations à partir des P-invariants

A partir de X_1 :

$$X_1^T \cdot \overline{M} \leq X_1^T \cdot M_0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \cdot f_1 \\ d_2 \cdot f_2 \\ d_3 \cdot f_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow d_1 \cdot f_1 + d_2 \cdot f_2 \leq 1$$

A partir de X_2 :

$$X_2^T \cdot \overline{M} \leq X_2^T \cdot M_0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \cdot f_1 \\ d_2 \cdot f_2 \\ d_3 \cdot f_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow d_1 \cdot f_1 + d_3 \cdot f_2 \leq 2$$

Evaluation des performances :

Exemple : système de production machine/palettes.

■ Etape 2 : relation entre les fréquences de franchissement

$$C.F = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow f_1 = f_2 = f$$

■ Etape 3 : résolution du système d'équations et d'inéquations

$$\begin{cases} d_1.f_1 + d_2.f_2 \leq 1 \\ d_1.f_1 + d_3.f_2 \leq 2 \\ f_1 = f_2 = f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d_1.f + d_2.f \leq 1 \\ d_1.f + d_3.f \leq 2 \\ f_1 = f_2 = f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f.(d_1 + d_2) \leq 1 \\ f.(d_1 + d_3) \leq 2 \\ f_1 = f_2 = f \end{cases}$$

Evaluation des performances :

Exemple : système de production machine/palettes.

$$\begin{cases} f \cdot (d_1 + d_2) \leq 1 \\ f \cdot (d_1 + d_3) \leq 2 \\ f_1 = f_2 = f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f \leq \frac{1}{d_1 + d_2} \\ f \leq \frac{2}{d_1 + d_3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f \leq \min\left(\frac{1}{d_1 + d_2}, \frac{2}{d_1 + d_3}\right)$$

Application numérique :

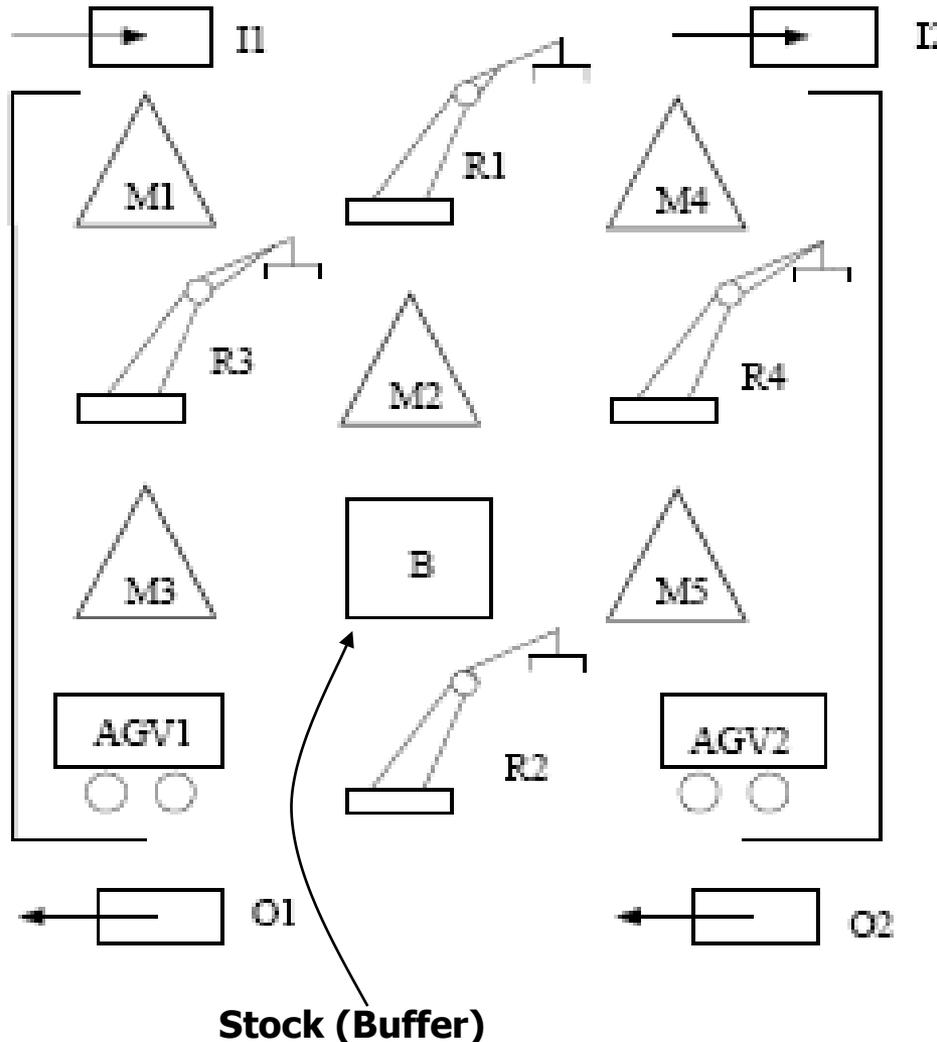
$$f \leq \min\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$$

$$f \leq \frac{1}{2}$$

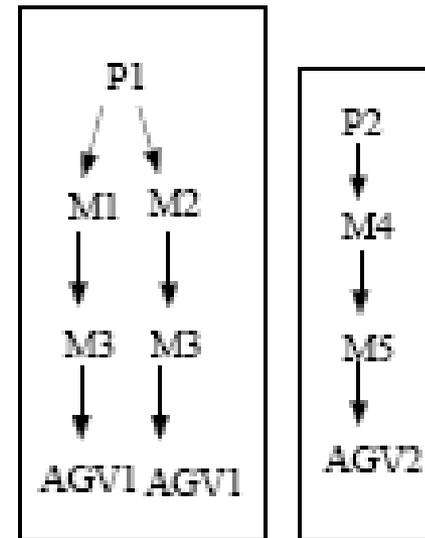
Interprétation :

- Le meilleur taux de production est d'une pièce toutes les 2 unités de temps,
- Un cycle dure 2 unités de temps.

Exercice 3 : atelier de production :



AGV = Automated Guided Vehicle



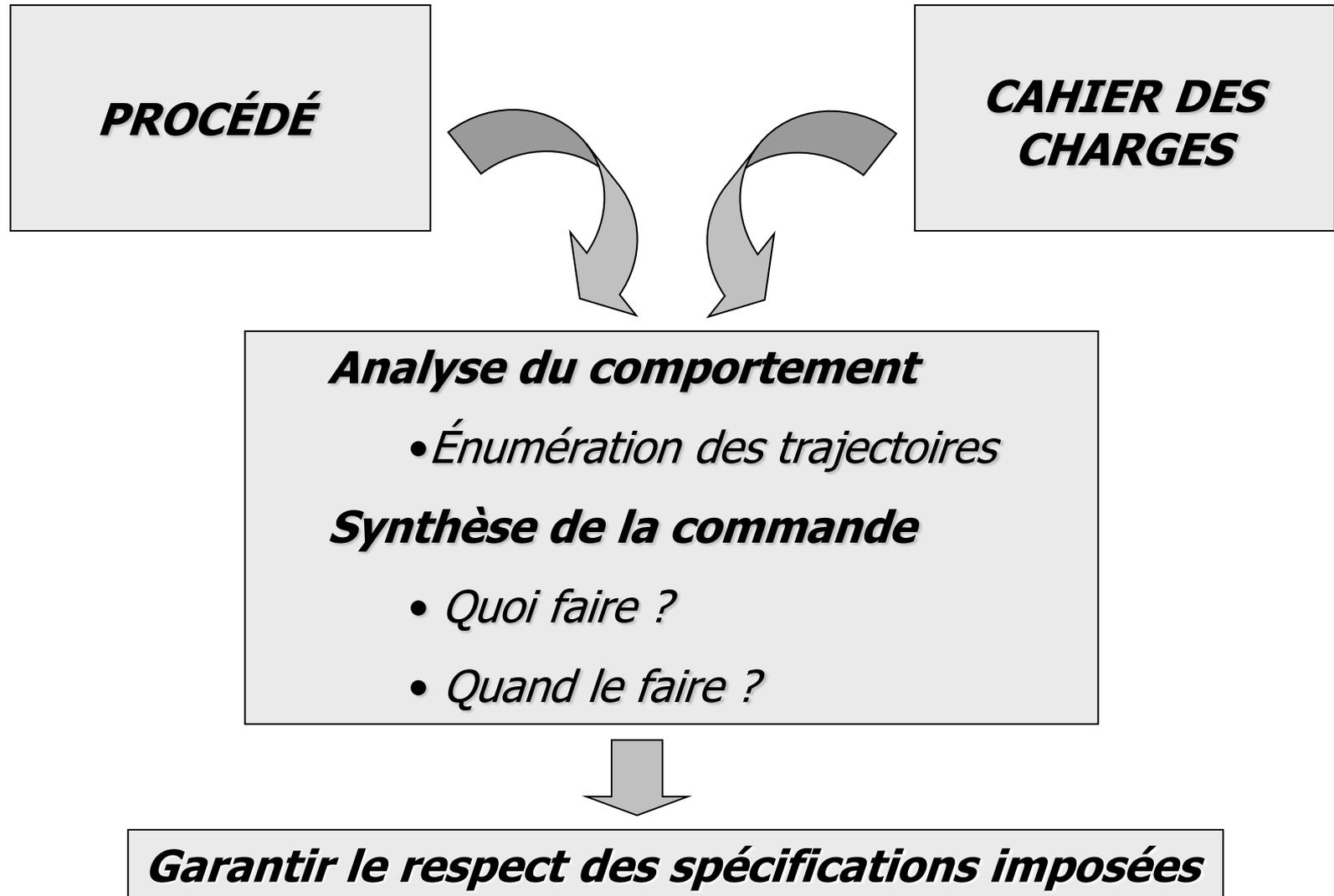
R1 charge M1, M2 et M4,

R3 décharge M1, M2 ⇒ stock, puis stock ⇒ charge M3,

R4 décharge M4 ⇒ stock, puis stock ⇒ charge M5,

R2 décharge M3 et M5 et charge les AGVs correspondants.

Problématique :

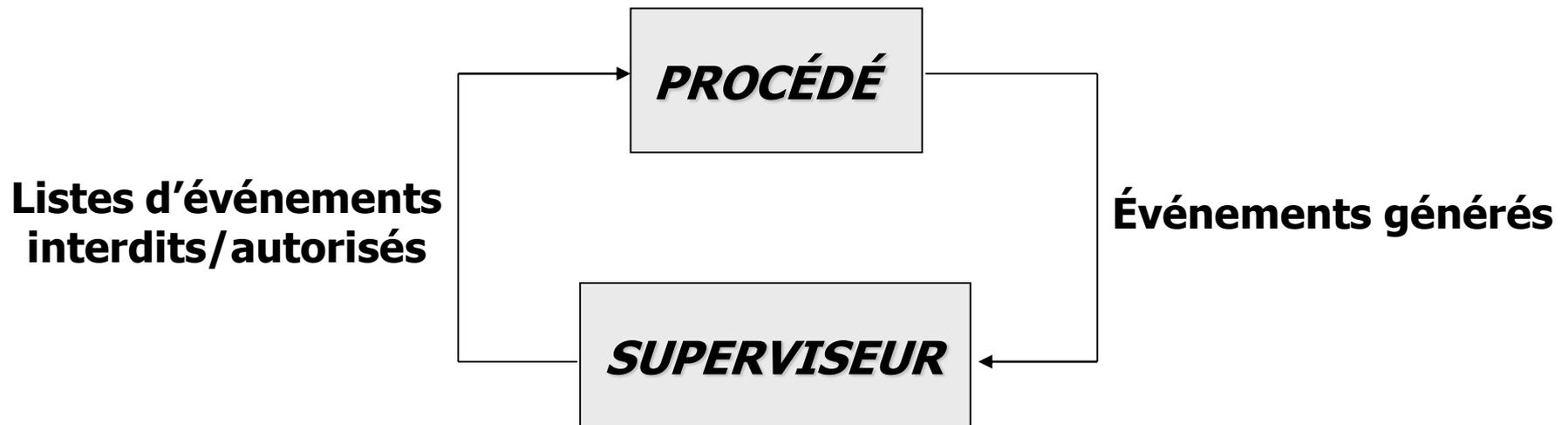


Approches existantes :

- **Théorie de la commande par supervision,**
- **Synthèse de la commande basée sur les Réseaux de Petri,**

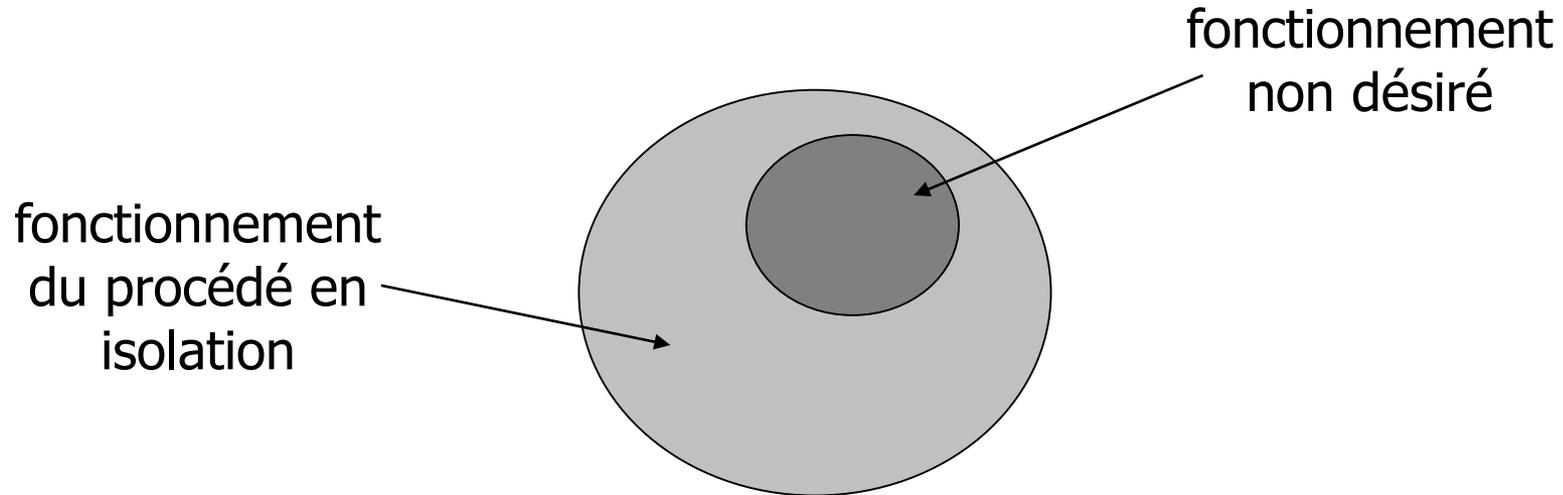
Théorie de la commande par supervision :

- Introduite par Ramadge & Wonham,
- **Schéma fonctionnel :**



Le superviseur sera alors un SED qui permettra de restreindre le fonctionnement du procédé à un comportement sans événements interdits (comportement admissible).

Théorie de la commande par supervision :

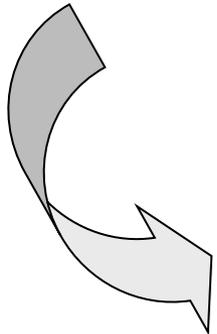
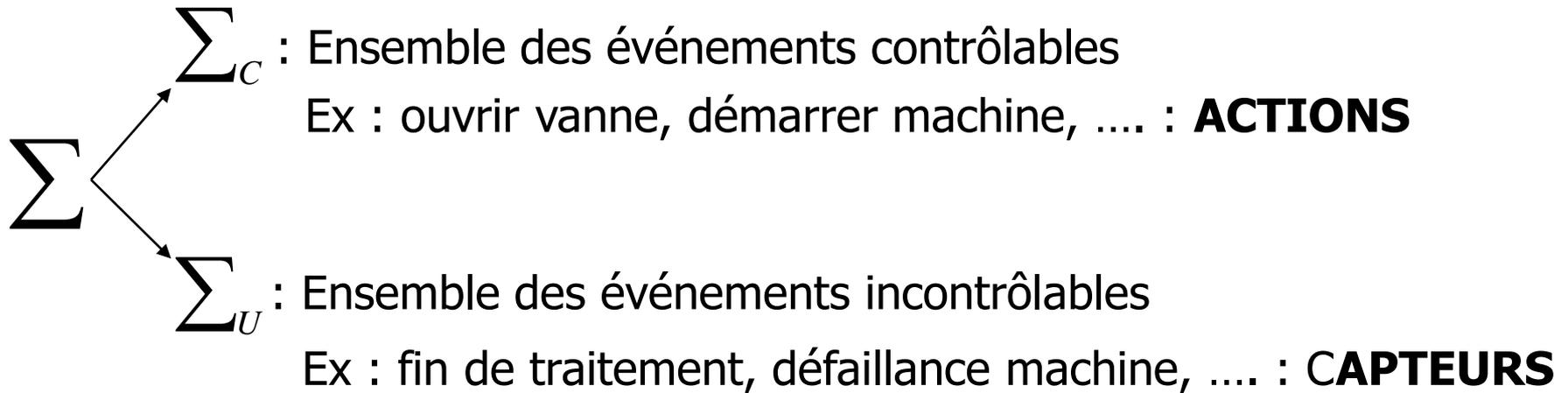


Objectifs de la commande d'un SED :

- Interdire le fonctionnement non désiré,
- Garantir au SED un comportement libre au maximum (maximum permissif) DANS le fonctionnement désiré.

Théorie de la commande par supervision :

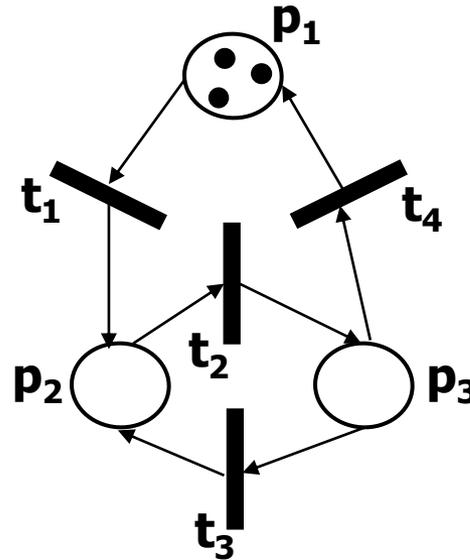
■ Structure de contrôle : partition de l'alphabet



Loi de commande : **autorisation** ou **interdiction**
d'événements.

Commande basée sur les Réseaux de Petri [*Moody et al.*] :

Illustration : soit le modèle suivant



On impose alors la spécification suivante, se traduisant par une contrainte sur le marquage de certaines places :

$$m(p_2) + m(p_3) \leq 1$$

Cette contrainte est représentée sous la forme d'une inéquation linéaire.

Commande basée sur les Réseaux de Petri [*Moody et al.*] :

L'objectif sera donc de déterminer le contrôleur **K**, sous la forme d'un réseau de Petri, tel que couplé avec le modèle du processus, le **système** obtenu satisfasse alors la contrainte imposée.

Méthode générale :

Soit la contrainte suivante : $\alpha_i \cdot m(p_i) + \alpha_j \cdot m(p_j) \leq b_1$ (1)

avec p_i et p_j deux places du RdP associé au processus étudié et α_i , α_j et b_1 des constantes entières.

L'inégalité (1) peut alors se mettre sous la forme d'une égalité en introduisant une variable auxiliaire $m(S_1)$. Cette variable auxiliaire représente le marquage d'une place supplémentaire S_1 (monitor place) qui permet de satisfaire l'égalité suivante :

$$\alpha_i \cdot m(p_i) + \alpha_j \cdot m(p_j) + m(S_1) = b_1 ,$$

Cette égalité peut alors s'interpréter comme un p-invariant en termes de RdP.

Commande basée sur les Réseaux de Petri [*Moody et al.*] :

Soit un processus P modélisé par un RdP de n places et m transitions, de matrice d'incidence \mathbf{C}_p et soumis à r contraintes d'exclusion mutuelle généralisées (Generalized Mutual Exclusion Constraints (GMEC)) précédentes.

On a alors :

$$\mathbf{V.M} \leq \mathbf{B},$$

avec : \mathbf{V} de dimension (r x n) et \mathbf{B} de dimension (r x 1).

L'introduction de variables auxiliaires conduit à :

$$\mathbf{V.M} + \mathbf{K} = \mathbf{B},$$

Avec \mathbf{K} de dimension (r x 1). Il sera alors introduit autant de places supplémentaires (monitor places) que de contraintes à respecter et \mathbf{K} représentera le marquage de ces dernières.

On peut voir dans l'équation précédente l'expression des r p-invariants d'un RdP de matrice d'incidence \mathbf{C} : ce RdP est celui du système (contrôleur + processus à commander).

Commande basée sur les Réseaux de Petri [*Moody et al.*] :

Le calcul des p-invariants :

$$X^T . C = 0 \text{ avec } C = \begin{bmatrix} C_P \\ C_C \end{bmatrix}$$

où C_P est la matrice d'incidence du processus et C_C celle du contrôleur.

Ce qui peut encore se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} V & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_P \\ C_C \end{bmatrix} = 0 \text{ ou } V.C_P + I.C_C = 0$$

Avec **I** la matrice d'identité de dimension (r x r).

Ainsi, la matrice d'incidence du contrôleur se déduit comme suit :

$$C_C = -V.C_P$$

La matrice C_C contient les arcs qui connectent les places S_i du contrôleur aux transitions du RdP du processus.

Commande basée sur les Réseaux de Petri [*Moody et al.*] :

Le marquage initial du modèle RdP du contrôleur M_{C0} est obtenu comme suit (M_{C0} représentant le marquage du modèle RdP du processus à commander) :

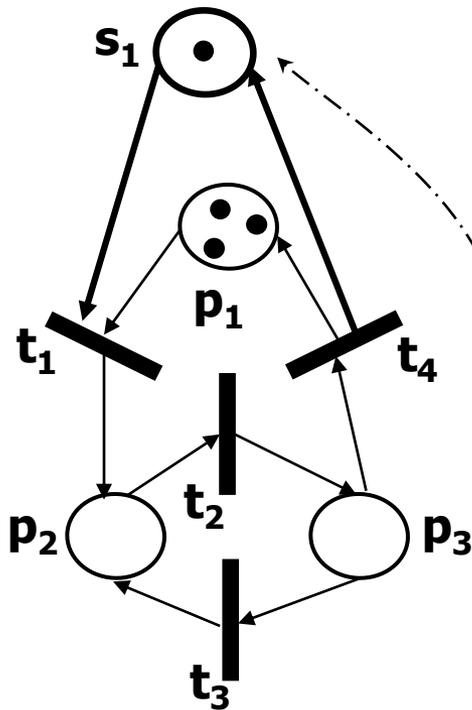
$$M_{C0} = B - V \cdot M_{P0}$$

Car il doit satisfaire la relation suivante (vue précédemment) : $\mathbf{V} \cdot \mathbf{M} + \mathbf{K} = \mathbf{B}$,

Une démarche de synthèse d'un contrôleur est alors dégagée.

Commande basée sur les Réseaux de Petri : illustration

La contrainte à respecter est la suivante : $m(p_2) + m(p_3) \leq 1$



$$C_P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, M_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, V = [0 \quad 1 \quad 1],$$

$$B = 1$$

$$C_C = -([0 \quad 1 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}) = [-1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

d'où

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ \boxed{-1 \quad 0 \quad 0 \quad 1} \end{bmatrix} \text{ et } M_0(S_1) = 1 - ([0 \quad 1 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = 1$$

Commande basée sur les Réseaux de Petri : application à l'interblocage

