

①

DS 1 - M31 - 25-26Exercice 1.

1. Soit f localement intégrable sur $[a, b[$.

On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est convergente si, pour $a < A < b$, on a

$\int_a^A f(t) dt$ qui converge vers une limite finie quand $A \rightarrow b$.

2. a). $\int_0^2 \frac{\ln(1+2t)}{t^2} dt$.

$f: t \rightarrow \frac{\ln(1+2t)}{t^2}$ est loc. int sur $]0, 2]$.

En 0, $\frac{\ln(1+2t)}{t^2} \sim \frac{2t}{t^2} = \frac{2}{t} > 0$

Or $\int_0^2 \frac{2}{t} dt$ diverge ($\alpha = 1 \geq 1$) donc $\int_0^2 \frac{\ln(1+2t)}{t^2} dt$ diverge

également.

b). $\int_0^1 \frac{t \ln t}{3-3t} dt$,

$f: t \rightarrow \frac{t \ln t}{3-3t}$ est loc. int sur $]0, 1[$.

En 0, $\frac{t \ln t}{3-3t} \sim \frac{t \ln t}{3} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$ par croissance comparée.

donc f est prolongeable par continuité en 0.

②

$$\text{En } 1, \quad \frac{t \ln t}{3-3t} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{\ln t}{3(1-t)} \stackrel{(u=t-1)}{=} \frac{\ln(1+u)}{-3u} \text{ avec } u=t-1$$

$$\underset{u \rightarrow 0}{\sim} \frac{u}{-3u} = -\frac{1}{3}$$

donc f est prolongeable par continuité en 1, (donc f est loc. int. sur $[0,1]$)

donc $\int_0^1 f(t) dt$ converge (intégrale faussement impropre).

d) $\int_0^{+\infty} \sin t \, t^3 e^{-t} dt.$

$f: t \rightarrow \sin t \, t^3 e^{-t}$ est localement intégrable sur $[0, +\infty[$

En $+\infty$, $|f(t)| = |\sin t \, t^3 e^{-t}| \leq t^3 e^{-t} \leq \frac{1}{t^2}$ pour t suffisamment grand ($t^5 e^{-t} \rightarrow 0$), donc comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge, $\int_1^{+\infty} |f(t)| dt$ est convergente, donc $\int_0^{+\infty} \sin t \, t^3 e^{-t} dt$ est absolument convergente (donc convergente)

e) $\int_0^{+\infty} \frac{2+\cos t}{\sqrt{t}+t^2} dt.$

$f: t \rightarrow \frac{2+\cos t}{\sqrt{t}+t^2}$ est loc. int. sur $]0, +\infty[$

• En 0, $f(t) = \frac{2+\cos t}{\sqrt{t}+t^2} \sim \frac{3}{\sqrt{t}} > 0$ et $\int_0^1 \frac{3}{\sqrt{t}} dt$ est convergente ($\alpha = \frac{1}{2} < 1$), donc $\int_0^1 f(t) dt$ également.

• En $+\infty$, on a $0 \leq f(t) \leq \frac{3}{t^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{3}{t^2} dt$ est convergente donc $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ également.

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{2+\cos t}{\sqrt{t}+t^2} dt$ est convergente.

(3)

$$3) \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+4} \right) dt.$$

Posons $X \geq 0$. $t \rightarrow \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+4}$ est loc. int sur $[0, +\infty[$

$$\begin{aligned} \int_0^X \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+4} dt &= \left[\ln(t+1) - \ln(t+4) \right]_0^X \\ &= \ln(X+1) - \ln(X+4) - \ln 1 + \ln 4 \\ &= \underbrace{\ln\left(\frac{X+1}{X+4}\right)}_{\xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 0} + \ln 4 \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} \ln 4 \end{aligned}$$

donc $\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+4} \right) dt$ est convergente et

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+4} dt = \ln 4.$$

Exercice 2:

1. a) $\sum_{n \geq 0} \frac{e^{2n}}{n!}$ Pour $u_n = \frac{e^{2n}}{n!} > 0$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{2n+2}}{e^{2n}} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{e^2}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 < 1$$

donc d'après le critère de d'Alembert on a $\sum u_n$ qui converge.

b). $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$ $u_n = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$

($u_n^{1/n} \rightarrow 1$ donc on ne peut pas conclure)

On cherche un équivalent de u_n .

$$u_n = e^{n \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)} = e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)} = e^{\frac{-n}{n+1} + o(1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-1}$$

(4)

Donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-1} \neq 0$, donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.

$$c). \sum_{n \geq 2} (-1)^n \frac{n}{1-n^2} \quad u_n = (-1)^n \frac{n}{1-n^2}$$

(On a $|u_n| = \frac{n}{n^2-1} \sim \frac{1}{n}$, donc $\sum |u_n|$ diverge)

On a une série alternée avec

$$|u_n| = \frac{n}{n^2-1}, \quad |u_n| \rightarrow 0, \text{ il faut voir si } |u_n| \text{ est décroissante.}$$

Posons $f: t \rightarrow \frac{t}{t^2-1}$ pour $t \geq 2$.

$$\text{On a } f'(t) = \frac{t^2-1-t(2t)}{(t^2-1)^2} = \frac{-t^2-1}{(t^2-1)^2} < 0$$

donc f est décroissante.

Donc $|u_n| = f(n)$ est une suite décroissante qui tend vers 0,
donc par le critère des séries alternées,

$$\underline{\sum_{n \geq 2} u_n \text{ converge.}}$$

$$2. \text{ Soit } r_n = \sqrt{\frac{1}{n}}$$



a) La hauteur de la pile à N cylindres est donnée par.

$$H_N = \sum_{n=1}^N r_n = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{n}}. \quad \text{Or } \left(\alpha = \frac{1}{2} \leq 1\right), \text{ la série}$$

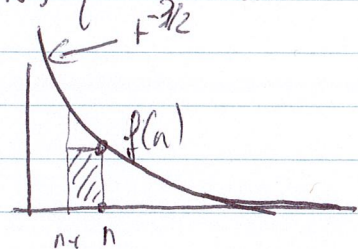
$\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge et $H_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} +\infty$, donc la pile prend
des hauteurs arbitrairement grandes quand $N \rightarrow +\infty$.

⑤ b) La masse d'une pile de N cylindres est

$$M_N = \sum_{n=1}^N 1 \cdot \pi r_n^2 \cdot \pi_n = \pi \sum_{n=1}^N \frac{1}{(\sqrt{n})^3} = \pi \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{3/2}}$$

Comme $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge, on aura (M_N) qui est bornée.

Pour une borne explicite, on a, pour $n \geq 2$,



$$\frac{1}{n^{3/2}} \leq \int_{n-1}^n \frac{1}{t^{3/2}} dt \quad \text{par décroissance}$$

donc en sommant, on a $\sum_{n=2}^N \frac{1}{n^{3/2}} \leq \int_1^N \frac{1}{t^{3/2}} dt = \left[-\frac{2}{t^{1/2}} \right]_1^N$

donc $M_N = \pi \left(1 + \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^{3/2}} \right) \leq \pi \left(1 + 2 - \frac{2}{\sqrt{N}} \right) \leq 3\pi \leq 10$

~~$= \frac{1^2}{2} - \frac{2}{2\sqrt{N}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{N}}$~~
 $= 2 - \frac{2}{\sqrt{N}} \leq 2$

donc M_N ne dépassera jamais 10 tonnes.

3. V/F

a). Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum (-1)^n u_n$ converge. Faux

ex: $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$. $\sum u_n$ converge, mais $\sum (-1)^n u_n = \sum \frac{1}{n}$ diverge.

b). $u_n > 0$. Si $\sum u_n$ diverge, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow l > 1$.

Faux: $u_n = \frac{1}{n}$. $\sum u_n$ diverge mais $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow 1$

c). Si $\sum u_n$ converge, $\sum \frac{3^n + u_n}{4^n + u_n}$ converge. Vrai.

En effet, si $\sum u_n$ converge, on a forcément $u_n \rightarrow 0$

donc $\frac{3^n + u_n}{4^n + u_n} \sim \left(\frac{3}{4}\right)^n > 0$ et $\sum \left(\frac{3}{4}\right)^n$ converge, donc

⑥

la série converge.

Exercice 3:

$$f_n(x) = x^2(1 + \sqrt{n} e^{-nx}) \quad \text{pour } x \geq 0$$

1. À x fixé, on a

$$f_n(x) = x^2(1 + \sqrt{n} e^{-nx})$$

$$\text{Si } x > 0, \quad \sqrt{n} e^{-nx} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \text{ donc } f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x^2$$

$$\text{et si } x = 0, \quad f_n(x) = 0 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

$$\text{donc dans tous les cas } \left[f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x^2 \right]$$

Donc f_n converge simplement vers $f: x \rightarrow x^2$ sur $[0, +\infty[$.

2. On a $d_n := f_n - f$: $d_n(x) = x^2 \sqrt{n} e^{-nx}$.

Étudions d_n sur $[0, +\infty[$.

$$d_n \text{ est dérivable et } d_n'(x) = \sqrt{n} e^{-nx} (-nx^2 + 2x) \\ = x \sqrt{n} e^{-nx} (-nx + 2)$$

Donc on a

x	0	$\frac{2}{n}$	$+\infty$
$d_n'(x)$	0	-	
$d_n(x)$	0	$\nearrow$	$\searrow$ 0

$$\text{donc } \sup d_n = \max d_n = d_n\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$\text{donc } \sup d_n = \frac{4}{n^2} \cdot \sqrt{n} e^{-2} \\ = \frac{4e^{-2}}{n^{3/2}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

$$\text{donc } \sup_{x \in [0, +\infty[} |f_n(x) - f(x)| = \frac{4e^{-2}}{n^{3/2}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \text{ donc}$$

(7)

(f_n) converge uniformément vers f sur $[0, +\infty[$.

$$3. \text{ On a } \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 x^2 (1 + \sqrt{n} e^{-nx}) dx$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^2 dx = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

car $f_n \rightarrow f$ uniformément sur $[0, 1]$.