INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES CENTRE VAL DE LOIRE

Mathématiques 3.1

2024-2025

2A STPI

Devoir surveillé N°1

Aucun document personnel autorisé - Pas de calculatrice

Exercice 1 : Intégrales généralisées *(barème indicatif : 7 points)*

1. VRAI/FAUX
   Soit f une fonction définie et continue sur $]0,+\infty[$ à valeurs positives sur $]0,+\infty[$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses ? Toutes les réponses devront être justifiées ; on s'appuiera, le cas échéant, sur l'utilisation de contre-exemples.
   (a) Si $f(t)$ tend vers $l \neq 0$ quand t tend vers 0, alors son intégrale sur $]0,1]$ diverge.
   (b) Si pour tout $t \geq 1$, $f(t) \leq e^{-t}$, alors l'intégrale de f sur $[1,+\infty[$ converge.
   (c) Si l'intégrale de f sur $]0,+\infty[$ converge alors l'intégrale de f sur $]0,+\infty[$ est absolument convergente.
2. Déterminer la nature des intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^1 \ln t\, dt$ (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-3t}}{t^2}\, dt$ (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} t \sin\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt$ (d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\,\ln(t)}{t^2 + e^{-t}}\, dt$

Exercice 2 : Séries numériques *(barème indicatif : 8 points)*

1. VRAI/FAUX
   Soit (u_n) une suite réelle. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses ? Toutes les réponses devront être justifiées ; on s'appuiera, le cas échéant, sur l'utilisation de contre-exemples.
   (a) Si $u_n \sim \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, on peut conclure que $\sum u_n$ converge.
   (b) Si $u_n = a_n + b_n$ avec (a_n) et (b_n) deux suites réelles telles que $\sum a_n$ et $\sum b_n$ divergent, alors $\sum u_n$ diverge.
   (c) Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2n^2}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\sum u_n$ converge absolument.
2. Déterminer la nature des séries suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^2.\ln(n).2^{3n+1}}{5^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 3} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2-3n+2}}$ (c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{3\sin(n^2)}{n^2}$

3. Justifier la convergence et calculer la valeur de la somme des deux séries suivantes :

(a) $\displaystyle S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} 3^{-n} e^{n+1}$ (b) $\displaystyle S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+3n}$

Exercice 3 : Suite et série de fonctions *(barème indicatif : 5 points)*

On pose $\forall n \geq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_n(x) = \dfrac{(-1)^n x}{n^2+x^2}$.

1. Déterminer $sup_{x\in\mathbb{R}^+}|f_n(x)|$. Que peut-on en déduire sur la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) sur $\mathbb{R}^+$?
2. Etudier la convergence simple de la série $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$.
3. Montrer que l'on a, sur $\mathbb{R}^+$, convergence uniforme mais pas convergence normale de la série $\sum f_n$.

Formulaire

Développements limités au voisinage de 0 de fonctions usuelles

$$\underset{(\alpha\in\mathbb{R})}{(1+x)^{\alpha}} = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$$

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

$$\cos(x) = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$$

$$\sin(x) = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$$

$$\tan(x) = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+o(x^8)$$

$$\arctan(x) = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+1})$$

Table de primitives de fonctions usuelles

$f(x)$	$F(x)$	*Domaine*
$\underset{(\alpha\neq-1)}{x^{\alpha}}$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}$ si $\alpha\in\mathbb{N}$, $\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha\in\mathbb{R}-\mathbb{N}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{th} x$	$\ln(\operatorname{ch} x)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$