INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES CENTRE VAL DE LOIRE

Mathématiques 3.1

2022-2023

2A STPI

Devoir surveillé N^{o}1

Aucun document personnel autorisé - Pas de calculatrice

Exercice 1 : Intégrales généralisées *(barème indicatif : 8 points)*

1. VRAI/FAUX
   Soit f une fonction définie et continue sur]0,+∞[à valeurs positives sur]0,+∞[. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses ? Toutes les réponses devront être justifiées ; on s'appuiera, le cas échéant, sur l'utilisation de contre-exemples.
   (a) Si $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = +\infty$, alors l'intégrale de f sur]0,1] diverge.
   (b) Si $\sqrt{t}\, f(t)$ tend vers 0 quand t tend vers 0, alors l'intégrale de f sur]0,1] converge.
   (c) Si l'intégrale de f sur]0,+∞[converge, alors son intégrale sur]0,1] converge.
2. Déterminer la nature des intégrales suivantes :
   (a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2t}\cos t\, dt$ (b) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin(\sqrt{t})}{t}\, dt$ (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\, dt$ (d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t^3+1}}\, dt$

Exercice 2 : Séries numériques *(barème indicatif : 8 points)*

1. Question de cours : énoncer et démontrer la condition nécessaire de convergence.
2. VRAI/FAUX
   Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses ? Toutes les réponses devront être justifiées ; on s'appuiera, le cas échéant, sur l'utilisation de contre-exemples.
   (a) Si la série $\sum u_n$ diverge alors la série $\sum |u_n|$ diverge.
   (b) Si $u_n \sim v_n$ alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
   (c) Si $u_n > 0$ et $\sum u_n$ converge alors la série $\sum \ln(1+u_n)$ converge également.
3. Montrer la convergence et calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1}$.
4. Etudier la nature des séries : (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^3}{n!}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

Exercice 3 : Suite de fonctions *(barème indicatif : 4 points)*

1. Montrer que la suite de fonctions $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} \cos(\sqrt{n}\, x)$ définies sur $[0,+\infty[$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ converge simplement vers une fonction f à déterminer.
2. Etudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[0,+\infty[$, puis sur $]0,+\infty[$, puis sur $[a,+\infty[$ avec $a > 0$.

Formulaire

Développements limités au voisinage de 0 de fonctions usuelles

$$\underset{(\alpha\in\mathbb{R})}{(1+x)^{\alpha}} = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$$

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

$$\cos(x) = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$$

$$\sin(x) = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$$

$$\tan(x) = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+o(x^8)$$

$$\arctan(x) = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+1})$$

Table de primitives de fonctions usuelles

$f(x)$	$F(x)$	*Domaine*
$\underset{(\alpha\neq-1)}{x^{\alpha}}$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}$ si $\alpha\in\mathbb{N}$, $\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha\in\mathbb{R}-\mathbb{N}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\mathrm{ch}\ x$	$\mathrm{sh}\ x$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{sh}\ x$	$\mathrm{ch}\ x$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{th}\ x$	$\ln(\mathrm{ch}\ x)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan\ x$	$\mathbb{R}$