INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES CENTRE VAL DE LOIRE

Mathématiques 3.1 — 2019-2020

2A STPI

Devoir surveillé N°1

Aucun document personnel autorisé - Pas de calculatrice

Exercice 1 : Intégrales généralisées *(barème indicatif : 8,5 points)*

1. VRAI/FAUX
   Soit f une fonction définie et continue sur $]0,+\infty[$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses ? Toutes les réponses devront être justifiées ; on s'appuiera, le cas échéant, sur l'utilisation de contre-exemples.
   (a) Si l'intégrale de f sur $]0,1]$ converge alors, f est prologeable par continuité en 0.
   (b) Si $tf(t)$ tend vers $+\infty$ quand t tend vers 0, alors l'intégrale de f sur $]0,+\infty[$ diverge.
   (c) L'intégrale de f sur $[1,+\infty[$ converge si l'intégrale de $|f|$ sur $[1,+\infty[$ converge.
   (d) L'intégrale de f sur $[1,+\infty[$ converge si $f(t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.
2. Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}\,dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}\,dt$ convergent et ont des valeurs opposées. En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}\,dt$.
3. Déterminer la nature de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{e^t-1}}\,dt$.

Exercice 2 : Séries numériques *(barème indicatif : 8 points)*

1. Question de cours : démontrer que si une série de terme général u_n converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
2. VRAI/FAUX
   Soit (u_n) une suite de nombres réels positifs. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses ? Toutes les réponses devront être justifiées ; on s'appuiera, le cas échéant, sur l'utilisation de contre-exemples.
   (a) Si (u_n) converge alors la série $\sum v_n$, où $v_n = u_n - u_{n-1}$, converge.
   (b) Si la série $\sum u_n^2$ converge, alors la série de terme général u_n converge.
   (c) Si la série $\sum(-1)^n u_n$ diverge, alors la série de terme général u_n diverge.
3. Etudier la nature des séries : a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{1-n^2}$.
4. Soit pour $n\geq 1$, $u_n = \dfrac{1}{4^n(2n-1)}$. On note $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.
   (a) Montrer que la série de terme général u_n converge.
   (b) Montrer que $R_n \leq \dfrac{4}{3}u_{n+1}$. En déduire que trois termes sont suffisants pour approcher $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ à 0,001 près.

Exercice 3 : Suite de fonctions *(barème indicatif : 3,5 points)*

1. Montrer que la suite de fonctions $f_n(x) = \dfrac{ne^x}{n+x}$ définies sur $[0,1]$ pour $n\in\mathbb{N}^*$ converge simplement vers une fonction f à déterminer.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$.

Formulaire

Développements limités au voisinage de 0 de fonctions usuelles

$$\underset{(\alpha\in\mathbb{R})}{(1+x)^\alpha} = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$$

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

$$\cos(x) = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$$

$$\sin(x) = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$$

$$\tan(x) = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+o(x^8)$$

$$\arctan(x) = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+1})$$

Table de primitives de fonctions usuelles

$f(x)$	$F(x)$	*Domaine*
$\underset{(\alpha\neq-1)}{x^\alpha}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}$ si $\alpha\in\mathbb{N}$, $\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha\in\mathbb{R}-\mathbb{N}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\mathrm{ch}\, x$	$\mathrm{sh}\, x$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{sh}\, x$	$\mathrm{ch}\, x$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{th}\, x$	$\ln(\mathrm{ch}\, x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan\, x$	$\mathbb{R}$