INSA — INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES CENTRE VAL DE LOIRE

Mathématiques 3.1 — 2024-2025

2A STPI

Devoir surveillé N^{o}2

Aucun document personnel autorisé - Pas de calculatrice

<u>Exercice 1 : Séries entières</u> *(barème indicatif : 7 points)*

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière suivante, puis déterminer son expression en termes de fonctions usuelles : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{8^n} x^n$.
2. On considère la série entière $S(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n(n-1)}$.
   (a) Déterminer le rayon de convergence, R, ainsi que le domaine de convergence de cette série.
   (b) Calculer $S'(x)$ et exprimer, au moyen des fonctions usuelles, la somme de cette série dérivée sur $]-R,R[$.
   (c) Démontrer que, $\forall x \in]-R,R[$, $S(x) = \displaystyle\int_0^x \ln(1+t)dt$ puis calculer cette intégrale.
   (d) Montrer que S converge normalement sur $[0,R]$. Que peut-on en déduire sur la continuité de S ?
   (e) En déduire la valeur exacte de $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$.

<u>Exercice 2 : Séries de Fourier</u> *(barème indicatif : 6 points)*

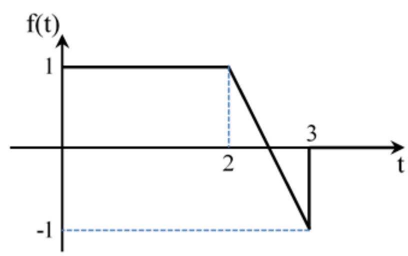
Soit f la fonction de période 2, paire, définie sur $[0,1]$ par $f(t) = t^2$. On note $S_f(t)$ la série de Fourier de f.

1. Tracer la courbe de f sur l'intervalle [-2,3].
2. Quel est l'ensemble des réels t tels que $f(t) = S_f(t)$? Justifier.
3. On donne, pour $n \geq 1$, $\displaystyle\int_0^1 t^2 \cos(n\pi t)dt = \frac{2\cos(n\pi)}{n^2\pi^2}$. Déterminer les coefficients de Fourier de f et écrire le développement en série de Fourier de f.
4. Calculer : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

<u>Exercice 3 : Transformées de Laplace</u> *(barème indicatif : 7 points)*

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Déterminer la transformée de Laplace de la fonction f causale dont le graphe est donné par :



2. Déterminer l'expression de la fonction f dont la transformée de Laplace est
$$F(p) = (1-e^{-2p})\frac{p^2}{(p^2+9)(p-3)^2}.$$
3. Déterminer f et tracer son graphe sur $[-1,6]$ si $\mathscr{L}(f)(p) = \dfrac{2-3e^{-p}+e^{-2p}}{p(1-e^{-3p})}$.
4. Déterminer la fonction f causale telle que :
$$f'(t) = \int_0^t f(t-u)\cos(u)du \text{ , } \forall t > 0 \quad \text{avec} \quad f(0) = 1$$

Formulaire

Table de Transformées de Laplace

$\mathcal{L}(\delta(t))$	1
$\mathcal{L}(U(t))$	$\dfrac{1}{p}$
$\mathcal{L}(tU(t))$	$\dfrac{1}{p^2}$
$\mathcal{L}(t^nU(t))$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
$\mathcal{L}\left(e^{-at}U(t)\right)$	$\dfrac{1}{p+a}$
$\mathcal{L}\left(te^{-at}U(t)\right)$	$\dfrac{1}{(p+a)^2}$
$\mathcal{L}\left(t^ne^{-at}U(t)\right)$	$\dfrac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
$\mathcal{L}(\cos(\omega t)\,U(t))$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
$\mathcal{L}(\sin(\omega t)\,U(t))$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\mathcal{L}(f(t-a)U(t-a))$	$\mathrm{e}^{-ap}F(p)$
$\mathcal{L}\left(e^{-at}f(t)\right)$	$F(p+a)$
$\mathcal{L}\left(f^{(n)}(t)\right)$	$p^nF(p)-p^{n-1}f(0^+)-p^{n-2}f'(0^+)-\ldots-f^{(n-1)}(0^+)$
$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)du\right)$	$\dfrac{F(p)}{p}$
$\mathcal{L}(tf(t))$	$-F'(p)$
$\mathcal{L}\left(\dfrac{f(t)}{t}\right)$	$\int_p^{+\infty}F(u)du$
Pour f T-périodique : $\mathcal{L}(f(t))$	$\dfrac{F_0(p)}{1-e^{-pT}}$ où $F_0(p)=\mathcal{L}(f_0(t))$
$\mathcal{L}(f*g)$	$F\times G$