INSA — INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES CENTRE VAL DE LOIRE	**Mathématiques 3.1** 2A STPI Devoir surveillé N°2	**2025-2026**

Aucun document personnel autorisé - Pas de calculatrice

Exercice 1 : Séries entières *(barème indicatif : 7,5 points)*

1. Soit $f(x) = \ln(2+x^2)$. Déterminer l'expression de f sous la forme d'une série entière en précisant son domaine de convergence. .

2. On définit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$.
   (a) Déterminer le domaine de convergence de f.
   (b) Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$.

3. On cherche à résoudre $(E) : y'' + xy' + y = 1$.
   (a) Pour $n \geq 1$ un entier, exprimer en fonction de $n!$ le produit des n premiers entiers pairs.
   (b) On suppose que $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est solution de (E). Déterminer la relation de récurrence satisfaite par les coefficients (a_n).
   (c) En déduire l'expression des coefficients (a_n) lorsque $a_0 = a_1 = 0$ puis exprimer y à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 2 : Séries de Fourier *(barème indicatif : 5 points)*

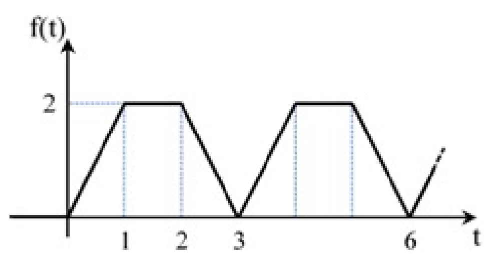
Soit f la fonction de période $T = 4$, paire, et définie sur $[0,2]$ par $f(x) = 1$ si $x \in [0,1[$, et $f(x) = -3$ sur $[1,2]$.

1. Tracer le graphe de f sur $[-6,6]$.
2. Déterminer la série de Fourier $\hat{f}(t)$ de la fonction f.
3. Déduire des résultats précédents la valeur des séries suivantes :

$$S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin(\frac{n\pi}{2}) \qquad S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin(\frac{n\pi}{2}) cos(\frac{n\pi}{2}) \qquad S_3 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

Exercice 3 : Transformée de Laplace *(barème indicatif : 7,5 points)*

1. Calculer la transformée de Laplace de la fonction f périodique, causale, représentée ci-contre :



2. Calculer la transformée de Laplace de la fonction f définie par $f(t) = te^{-3t} U\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$

3. Calculer les transformées de Laplace inverses des fonctions : (a) $F(p) = \frac{1+e^{-p}}{p^2+p+1}$ (b) $F(p) = \frac{p^2+16}{p^2(p+3)}$

4. Déterminer la fonction f causale telle que :

$$25 \int_0^t f(t-u)\cos(4u)du = f'(t) + 3U(t) \text{ , } \forall t > 0 \quad \text{avec} \quad f(0) = 1$$

Formulaire

Table de Transformées de Laplace

$\mathcal{L}(\delta(t))$	1
$\mathcal{L}(U(t))$	$\dfrac{1}{p}$
$\mathcal{L}(tU(t))$	$\dfrac{1}{p^2}$
$\mathcal{L}(t^n U(t))$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
$\mathcal{L}\left(e^{-at}U(t)\right)$	$\dfrac{1}{p+a}$
$\mathcal{L}\left(te^{-at}U(t)\right)$	$\dfrac{1}{(p+a)^2}$
$\mathcal{L}\left(t^n e^{-at}U(t)\right)$	$\dfrac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
$\mathcal{L}(\cos(\omega t)\, U(t))$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
$\mathcal{L}(\sin(\omega t)\, U(t))$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\mathcal{L}(f(t-a)U(t-a))$	$\mathrm{e}^{-ap}F(p)$
$\mathcal{L}\left(e^{-at}f(t)\right)$	$F(p+a)$
$\mathcal{L}\left(f^{(n)}(t)\right)$	$p^n F(p) - p^{n-1}f(0^+) - p^{n-2}f'(0^+) - \ldots - f^{(n-1)}(0^+)$
$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)du\right)$	$\dfrac{F(p)}{p}$
$\mathcal{L}(tf(t))$	$-F'(p)$
$\mathcal{L}\left(\dfrac{f(t)}{t}\right)$	$\int_p^{+\infty} F(u)du$
Pour f T-périodique : $\mathcal{L}(f(t))$	$\dfrac{F_0(p)}{1-e^{-pT}}$ où $F_0(p) = \mathcal{L}(f_0(t))$
$\mathcal{L}(f * g)$	$F \times G$