

Eléments de réponse

Exercice 1

1(a) FAUX

(Considérer par exemple $f: t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{t}}$ sur $]0, +\infty[$)

(b) VRAI

(f étant une fonction définie et continue sur $]0, +\infty[$ à valeurs positives sur $]0, +\infty[$, si $\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} f(t) = 0$ alors il existe un intervalle de la forme $]0, a[$ tel que $\forall t \in]0, a[, 0 \leq \sqrt{t} f(t) \leq 1$)

(c) VRAI

2(a) Convergente

$$(\forall t \in [0, +\infty[, |e^{-t} \cos t| \leq e^{-2t})$$

(b) Convergente

$$\left(\frac{\sin(\sqrt{t})}{t} \sim \frac{1}{\sqrt{t}} \right)$$

(c) Convergente

(En 0 : on montre que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} = 1$)

(En $+\infty$: $\forall t \geq 1, 0 \leq \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \leq e^{-t}$)

(d) Convergente

$$\left(\begin{array}{l} \text{En } 0: \quad \frac{-\ln t}{\sqrt{t^3+1}} \sim -\ln t \\ \text{et pour } x \in]0,1], \quad F(x) = \int_x^1 -\ln t \, dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \\ \\ \text{En } +\infty: \quad \frac{\ln t}{\sqrt{t^3+1}} \sim \frac{\ln t}{t^{3/2}} \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{1,1} \times \frac{\ln t}{t^{3/2}} = 0 \end{array} \right)$$

Exercice 2

2 (a) VRAI

(Contre-exemple du théorème d'absolue convergence)

(b) FAUX

(Considérez par exemple : $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$)

(c) VRAI

(On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et $\ln(1+u_n) \sim u_n$)

$$3 \left(|u_n| \sim \frac{1}{n^2} \right. \\ \left. \text{On pose } S_n = \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{k^2-1} \text{ et on montre que } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{4} \right)$$

4 (a) Convergente

(utilisation du critère de d'Alembert pour montrer l'absolue convergence)

(b) Divergente
(on montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \neq 0$)

Exercice 3

1 On montre que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$
vers la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \in]0, +\infty[\end{cases}$

2 non convergence uniforme sur $[0, +\infty[$
(f n'est pas continue sur $[0, +\infty[$)

non convergence uniforme sur $]0, +\infty[$
(on peut considérer $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$)

convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$

($\forall x \in [0, +\infty[, |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{n+2}{n+1} e^{-na^2}$)