NOM :
Prénom :
Groupe TD :

DS1 maths 3.2 2021-2022

Le barème est donné à titre indicatif,
documents non autorisés, calculatrice collège non autorisée

Questions de cours (1 pt)

1. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et $A, B \subset \Omega$, donner la définition de : A et B sont indépendants.

A et B indépendants
$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$

2. Donner la définition de A et B sont incompatibles (ou disjoints)

A et B incompatibles $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

1.

Exercice 1. (4 points)

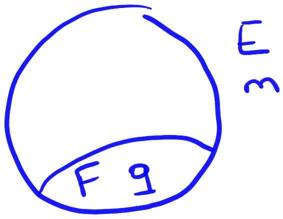
1. (a) Si k et n sont des entiers naturels, que vaut $\binom{n}{k}$ si $k > n$?

-

$k > n \quad \binom{n}{k} = 0$

(b) Si k et n sont des entiers naturels, que vaut $\binom{n}{k}$ si $k \leq n$? (donner le résultat sous forme d'une fraction)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$



2. Soient m et q des entiers naturels tels que $q \leq m$. Considérons un ensemble E ayant m éléments. Soit F une partie (on dit aussi sous-ensemble) de E contenant q éléments. Soit $p \in \mathbb{N}$

   (a) Donner une formule (combinaisons, arrangements,...) sans chercher à l'expliciter, correspondant au nombre de parties de E contenant exactement p éléments dont aucun élément de F.

   $\binom{m-q}{p}$: on choisit les p elements sans ordre ni repetit° ds les (m-q éléments) de E\F

   (b) Même question avec le nombre de parties de E contenant exactement p éléments dont exactement 1 élément de F.

   $$\underbrace{\binom{m-q}{p-1}}_{\text{choix des p-1 elemt restants}} \underbrace{\binom{q}{1}}_{\text{choix de l'elemt ds F}}$$

   (c) Plus généralement, même question avec le nombre de parties de E contenant exactement p éléments dont exactement k éléments de F où k est un entier naturel.

   $$\underbrace{\binom{q}{k}}_{\text{choix des k elemt ds F}} \underbrace{\binom{m-q}{p-k}}_{\text{choix des élémt restants ds E\\F}}$$

   (d) Quelle relation existe-t-il entre $\binom{m}{p}$ et $\sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k}\binom{m-q}{p-k}$? (Justifier votre réponse)

   $\binom{m}{p}$ = nb de parties de E ayant p élémt

   $\binom{q}{k}\binom{m-q}{p-k}$ = ——— ayant p elemt avec exactemt k elemt de F

   donc $\binom{m}{p} = \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k}\binom{m-q}{p-k}$

Exercice 2. (6 points)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Deux joueurs A et B s'affrontent autour d'un jeu composé de plusieurs parties, chaque partie étant jouée par un seul joueur. A joue la première partie, s'il perd, B joue la deuxième partie. Si B perd, A joue la troisième partie et ainsi de suite. Le jeu s'arrête dès que l'un des joueur gagne ou bien si $2n$ parties ont été jouées. On suppose que la probabilité que A gagne une partie est $a \in]0,1[$, que la probabilité que B gagne une partie est $b \in]0,1[$ et que les résultats des différentes parties sont indépendants les uns des autres.

1. Exprimer en fonction de a, b, n, la probabilité que ni A ni B ne gagne le jeu.

L'evenement s'ecrit :

$P(\overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{A_3} \cap \ldots \cap \overline{A_{2n-1}} \cap \overline{B_{2n}})$

$= P(\overline{A_1}) . P(\overline{B_2}) \ldots P(\overline{A_{2n-1}}) P(\overline{B_{2n}})$

car les évènemt sont 2 à 2 independants

$= (1-a)^n (1-b)^n$

2. Soit $1 \leq i \leq 2n$. On note A_i l'événement A gagne la $i$ème partie et B_i l'événement B gagne la $i$ème partie.

(a) Que vaut $P(A_1)$?

$P(A_1) = a$

(b) Que vaut $P(\overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap A_3)$? (si $n \geq 2$)

ĉ les evenements sont independants :

$P(\overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap A_3) = P(\overline{A_1}) . P(\overline{B_2}) P(A_3)$

$= (1-a)(1-b)a$

(c) Que vaut $P(\overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{A_3} \cap \ldots \cap \overline{B_{2k-2}} \cap A_{2k-1})$ (si $1 \leq k \leq n$)

De m̄ en utilisant l'independance

$= P(\overline{A_1}) . P(\overline{B_2}) P(\overline{A_3}) \ldots P(\overline{B_{2k-2}}) P(A_{2k-1})$

$= (1-a)^{k-1} (1-b)^{k-1} . a$

$P(A \text{ gagne}) = P(A_1) + P(\bar{A_1} \cap \bar{B_2} \cap A_3) + \cdots + P(\bar{A_1} \cap \bar{B_2} \cap \cdots A_{2n})$
car les évènement sont 2 à 2 disjoints

3. En déduire la probabilité que A gagne le jeu. (On exprimera la somme obtenue en fonction de a, q, n où $q = (1-a)(1-b)$)

$$P(A\text{gagne}) = a \sum_{k=0}^{n-1} (1-a)^k (1-b)^k = a \sum_{k=0}^{n-1} q^k$$

$$= a \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = a \frac{1-((1-a)(1-b))^n}{a+b-ab}$$

4. De même calculer la probabilité que B gagne le jeu ?

$$P(B\text{gagne}) = P(\bar{A_1} \cap B_2) + P(\bar{A_1} \cap \bar{B_2} \cap \bar{A_3} \cap B_4) + \cdots$$

$$= (1-a)b + (1-a)^2(1-b).b + \cdots$$

$$= b(1-a) \sum_{k=0}^{n-1} (1-a)^k (1-b)^k = b(1-a) \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$= b(1-a) \frac{1-(1-a)^n(1-b)^n}{a+b-ab}$$

5. A quelle condition le jeu est-il équitable ? Cette condition dépend-t-elle de n ?

Le jeu est equitable si
A et B ont la m̄ probabilité de
gagner :

$P(A\text{gagne}) = P(B\text{gagne})$

$\Leftrightarrow \quad b(1-a) = a$

Cette condit° ne depond pas de n

Exercice 3. (5 pts) Une usine fabrique des pièces et utilise 3 machines A, B et C qui produisent respectivement 50%, 30% et 20% des pièces. Des défauts apparaissent avec la machine A sur 2% des pièces, avec la machines B sur 4% des pièces, et avec la machine C sur 5% des pièces.

1. On prend une pièce au hasard, quelle est la probabilité qu'elle soit défectueuse ?

$$P(Def) = P(Def/A)\,P(A) + P(Def/B)\,P(B) + P(Def/C)\,P(C)$$

$$= \frac{\cancel{2}}{1\ \cancel{100}}\ \frac{\cancel{50}}{\cancel{100}} + \frac{4}{100}\ \frac{30}{100} + \frac{5}{100}\ \frac{20}{100}$$

$$= \frac{320}{100 \times 100} = 32\ ‰$$

2. On prend une pièce au hasard, quelle est la probabilité que ce soit une pièce défectueuse fabriquée par la machine A ?

$$P(Def \cap A) = P(Def/A)\,P(A)$$

$$= \frac{2}{100} \cdot \frac{50}{100} = 1\ \%$$

3. On prend une pièce au hasard, elle est défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle ait été fabriquée par la machine A ?

$$P(A/Def) \underset{\text{Bayes}}{=} \frac{P(Def/A)\,P(A)}{P(Def/A)\,P(A) + P(Def/\bar{A}).P(\bar{A})}$$

$$= \frac{1\ \%}{1\% + \frac{9}{100} \times \frac{50}{100}} \simeq 18\ \%$$

4. On prend une pièce au hasard, elle est défectueuse et elle ne provient pas de la machine A, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la machine B ?

$$P(B/Def \cap \bar{A}) = P(B/Def \cap (B \cup C))$$

$$= \frac{P(B \cap (Def \cap (B \cup C)))}{P((Def \cap B) \cup (Def \cap C))}$$

$$= \frac{P(B \cap Def)}{P(B \cap Def) + P(C \cap Def)}$$

1.

$$= \frac{4/100 \times \frac{30}{100}}{\frac{4}{100} \times \frac{30}{100} + \frac{20}{100} \times \frac{5}{100}}$$

$$\simeq 54{,}5\ \%$$

1

Exercice 4. (4 points) Dans cet exercice, il est inutile d'effectuer ou simplifier les calculs obtenus.

1. Combien y-a-t-il de codes possibles sur cet antivol ?

Pour chaque chiffre il y a 10 choix, donc 10^4 codes possibles

2. Combien y-a-t-il de codes contenant exactement deux 9 ?

$$\underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{choix de la place des deux 9}} \times \underbrace{9}_{\text{nb de choix pour les places restantes}} \times 9$$

0

3. Combien y-a-t-il de codes possibles si on n'utilise pas plusieurs fois un même chiffre ?

Dans ce cas les repetitions ne sont pas possibles : il y a $10 \times 9 \times 8 \times 7$ choix

4. Le propriétaire de cet antivol a oublié le code qui permet de le débloquer. Il se souvient juste que le code contient au moins un 8. Il compose donc un code au hasard contenant au moins un 8. Quelle est la probabilité qu'il débloque l'antivol ?

Nb de codes ne contenant aucun 8 : 9^4

Nb de codes contenant au moins un 8 : $10^4 - 9^4$

$P(\text{"Antivol Debloqué"}) = \dfrac{1}{10^4 - 9^4}$