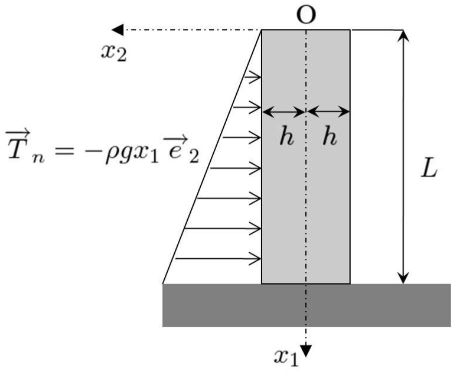
Problème (élasticité 2D) $(8\,pts)$

Dans le plan (x_1, x_2), on considère un barrage de largeur $2h$ et de hauteur L ; l'axe x_1 est vertical descendant, l'origine étant prise sur la face supérieure du barrage (cf. Figure). La paroi verticale droite ($x_2 = -h$) est supposée libre de force ; la paroi verticale gauche ($x_2 = h$) est soumise à la pression de l'eau que reflète le vecteur contrainte $\vec{T}_n = -\rho g x_1 \vec{e}_2$ (g représente la constante de gravité et ρ la densité volumique de l'eau).
On néglige les effets de la gravité dans le barrage, ainsi que toute autre force volumique.



Le champ de contraintes dans le barrage est supposé de la forme suivante (seul l'état de contraintes dans le plan (x_1, x_2) sera considéré) :

$$\sigma_{11} = \frac{\rho g x_1^3 x_2}{4h^3} + \frac{\rho g}{4h^3}\left[\frac{6}{5}h^2 x_1 x_2 - 2x_1 x_2^3\right]$$

$$\sigma_{22} = -\frac{\rho g x_1}{2} + \rho g x_1\left[\frac{x_2^3}{4h^3} - \frac{3x_2}{4h}\right]$$

$$\sigma_{12} = \frac{3\rho g x_1^2}{8h^3}[h^2 - x_2^2] - \frac{\rho g}{8h^3}[h^4 - x_2^4] + \frac{3\rho g}{20h}[h^2 - x_2^2]$$

1. Montrer que ce tenseur de contraintes vérifie les équations d'équilibre statique. $(2\,pts)$
2. Préciser les conditions aux limites sur les deux parois verticales $x_2 = -h$ et $x_2 = h$ et vérifier qu'elles sont bien respectées à partir de ce tenseur de contraintes. $(2\,pts)$
3. Exprimer le vecteur contrainte sur la face supérieure $x_1 = 0$, et vérifier que la force résultante et le moment résultant (par rapport au point $(0, 0)$) sont nuls. $(3\,pts)$
4. Exprimer les déformations ε_{11}, ε_{22} et ε_{12} au point $(0, 0)$. $(1\,pt)$