

Exercice 1:

$$x^2 + xy + y^2 + x - y = 0$$

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \quad \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1/2 \\ 1/2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$(1,5) \quad = (1-\lambda)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)\left(\frac{3}{2} - \lambda\right) \quad 0,25$$

$$Sp = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\}$$

$$\underline{E_{1/2}}: A - \frac{1}{2}I = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$E_{1/2} = \text{Vect} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = v_1 \quad 0,5$$

$$\underline{E_{3/2}}: A - \frac{3}{2}I = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$E_{3/2} = \text{Vect} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = v_2 \quad 0,5$$

A est diagonalisable et $A = P \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix} P^{-1}$

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ est orthogonale. } 0,25$$

2) Dans cette base $\mathcal{O}'$

$$0,25 \quad \frac{1}{2} x'^2 + \frac{3}{2} y'^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} (x' + y') - \frac{1}{\sqrt{2}} (-x' + y') = 0 \quad 0,25$$

$x = P x' \quad 0,5 \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y') \end{cases}$

$$\frac{1}{2} x'^2 + \frac{3}{2} y'^2 + \frac{2}{\sqrt{2}} x' = 0$$

(1, 5)

$$\frac{1}{2} \left(x' + \frac{2}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{3}{2} y'^2 = 1$$

0, 5

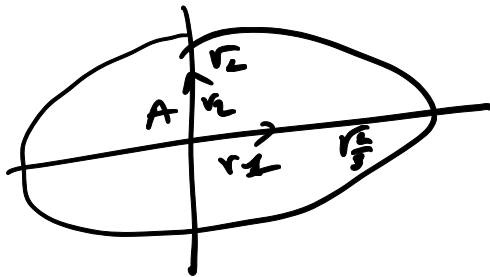
A a pour coordonnées $(-\frac{2}{\sqrt{2}}; 0)$ 0, 2, 5

3) C est une ellipse.

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{\frac{2}{3}}} \right)^2 = 1$$

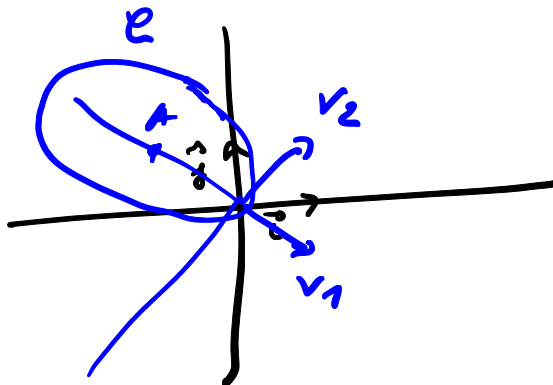
0, 5

4)



0, 5

5)



0, 5

Exercice 2

1) $q(x_1, x_2, x_3) = 5x_1x_2 + 2x_2x_3 + 6x_1x_3$

$$= 2 \left(x_2 + \frac{1}{2} 6x_1 \right) \left(x_3 + \frac{1}{2} 5x_1 \right) - \frac{15}{2} x_1^2$$

0,5

$$= 2 \left(\overbrace{x_2 + 3x_1}^a \right) \left(\overbrace{x_3 + \frac{5}{2}x_1}^b \right) - \frac{15}{2} x_1^2$$

$$= \frac{2}{4} \left((a+b)^2 - (a-b)^2 \right) - \frac{15}{2} x_1^2$$

0,5

signature (1, 2) 0,5

b) $x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_2x_3$

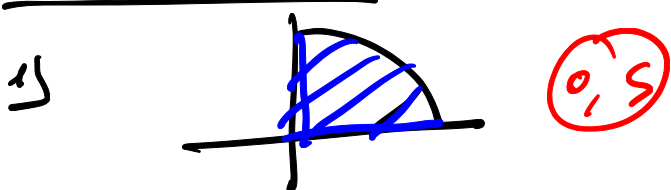
$$= (x_1 + x_2)^2 + 3x_2^2 + 9x_3^2 + 6x_2x_3$$

$$= (x_1 + x_2)^2 + 3(x_2 + x_3)^2 + 6x_3^2$$

so (3, 0) ✓ 1

2) on aurait pu écrire la matrice associée au forme quadratique et regarder le signe des vp. 0,5

Exercice 3:



2) non: $A(0,0) \in D$ et si $r > 0$

$c(-\frac{r}{2}; 0) \in B(A, r)$ et $c \notin D$. (1)

A n'est pas intérieur à D , D n'est pas ouvert.

3) non: $u_n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - \frac{1}{n} \end{pmatrix} \in D$ et $\lim u_n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin D$ (2)

4) $\mathbb{R}^2$ n'a $\emptyset$. (0,5)

Exercice 4:

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$\varphi(0,1) = 0 \text{ et } (0,1) \neq (0,0). \quad (1)$$

φ n'est pas une norme.

Exercice 5:

$$f(x,y) = 600 + 200x + 200y - 2x^2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 200 - 4xy \quad \left. \vphantom{\frac{\partial f}{\partial x}} \right\} 0,5$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 200 - 2x^2$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 50 \\ x^2 = 100 \end{cases} \quad \left. \vphantom{\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}} \right\} 0,5$$

$$\left. \begin{array}{l} x=10 \text{ et } y=5 \\ \text{ou} \\ x=-10 \text{ et } y=-5 \end{array} \right) 0,5$$

(1,5)

c) $x \geq 0$ et $y \geq 0$. 0,25

forme quadratique associée à $(10, 5)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4x \quad 0,5$$

$$Q_{(10,5)}(h_1, h_2) = -20h_1^2 - 40h_1h_2 \quad 0,5$$

$$= -20(h_1 + h_2)^2 + 20h_2^2 \quad 0,5$$

(2)

signature $(1, 1)$ point col, pas d'extrema local. 0,5



b) Test en borne: $\forall (x, y) \in T \quad |x| \leq 300$
 $|y| \leq 300$ 0,5

Test en fermé: Soit $U_n \mid \begin{smallmatrix} x_n \\ y_n \end{smallmatrix}$ une suite cv de T
 cv vers $\ell \mid \begin{smallmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{smallmatrix}$.

$$\forall n \quad x_n \geq 0 \quad y_n \geq 0 \quad x_n + y_n \leq 300 \quad | \quad 0,75$$

par passage à la limite

$$l_1 \geq 0 \quad l_2 \geq 0 \quad l_1 + l_2 \leq 300 \text{ donc}$$

1,5

$l \in T$.

T est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$ donc en compact de $\mathbb{R}^2$. 0,5

$\Rightarrow f$ est continue sur un compact donc est borné et atteint ses bornes. 10,5

il n'y a pas d'extremum local - donc $\inf_T$ est atteint sur le bord de T . 10,5 ①

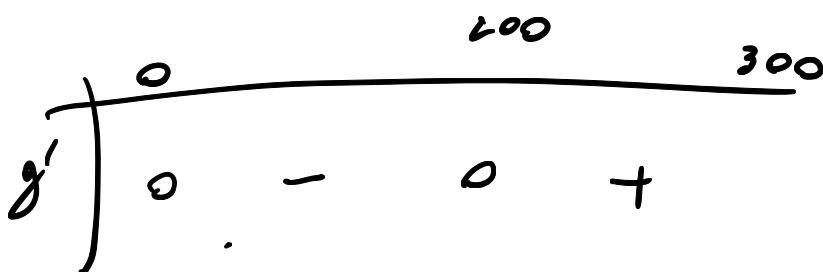
d) $f(x, 300-x) = g(x)$ pour $x \in [0; 300]$:

$$g(x) = 600 + 200x + 600 - 200x - 2x^2(300-x)$$

$$= 1200 - 600x^2 + 2x^3$$

$$g'(x) = -1200x + 6x^2$$

$$= x(9x - 1200)$$



$$\begin{array}{c} 8 \\ \hline \end{array} \quad \rightarrow \quad -7939400$$

✓ ①

e) Sur le bord $x=0$ $y \in [0; 300]$

$$f(0, y) = 600$$

0,25

①

$$y=0 \quad x \in [0, 300]$$

$$f(x, 0) = 600 + 200x \rightarrow \text{minimum par}$$

$$0,5 \quad x=300 \quad f(0, 0) = 600$$

$$\min_T f = -7939400 \cdot 0,15$$

Le minimum est obtenu en $(200, 100)$

①,5

