DS1 maths 4.1 2022-2023

Le barème est donné à titre indicatif,
documents non autorisés, calculatrice collège autorisée
Les réponses doivent être justifiées
Ne pas écrire au crayon de papier

Exercice 1. Soit $c > 0$, on considère la forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$, définie par :

$$q(x,t) = x^2 - c^2t^2$$

1. Applications directes du cours
   (a) (0,5 point) Quelle est la matrice de q relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$?
   (b) (0,5 point) Quelle est la signature de q ?
   (c) (0,5 point) Déterminer le noyau de q.
   (d) (0,5 point) Déterminer l'ensemble des vecteurs isotropes pour q.
   (e) (0,5 point) Soit φ la forme polaire de q (forme bilinéaire symétrique associée à q), $\forall (x, x', t, t') \in \mathbb{R}^4$, compléter l'égalité suivante :
   $\varphi((x,t),(x',t')) =$
   (f) (0,5 point) La forme bilinéaire symétrique φ définie ci-dessus est-elle un produit scalaire ?(justifier votre réponse)
2. (a) (0,5 point) Déterminer l'ensemble $\mathscr{C} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2,\ q(x,t) \leq 0, t \geq 0\}$ et le représenter dans un repère orthonormé.
   (b) (0,25 point) Placer le point A de coordonnées (0,1) et le point B de coordonnées $(\frac{c}{4}, \frac{1}{2})$, sur le dessin ci-dessus.
   (c) Question bonus (1,25 point) Soit f la fonction définie sur $\mathscr{C}$ par :

$$f(x,t) = \frac{1}{c}\sqrt{-q(x,t)}\ \forall (x,t) \in \mathscr{C}$$

      i. (0,25 point) Calculer et comparer $f(0,1)$ et $f(\frac{c}{4}, \frac{1}{2}) + f(-\frac{c}{4}, \frac{1}{2})$
      ii. (1 point) En relativité restreinte, c désigne la vitesse de la lumière et $f(x_2 - x_1, t_2 - t_1)$ peut s'interpréter comme le temps propre du trajet dans l'espace temps, pour aller de (x_1, t_1) à (x_2, t_2) ? si (x_1, t_1) et (x_2, t_2) sont dans $\mathscr{C}$ et si $t_2 \geq t_1$. Paradoxe des jumeaux : deux jumeaux se trouvent ensemble à $x = 0,\ t = 0$. Le jumeau n°1 ne bouge pas. Quel âge a-t-il à $t = 1$? (dans l'unité de temps utilisée)
      Le jumeau n°2 se déplace à la vitesse $\frac{c}{2}$ dans la direction des x

pendant un temps $t = \frac{1}{2}$ puis fait demi-tour et revient au point de départ à la même vitesse.
Quels sont ses coordonnées dans l'espace-temps à $t = \frac{1}{2}$? Quel âge a-t-il lorqu'il retrouve son frère ?

Exercice 2. On considére la forme quadratique q de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$q(x, y, z) = x^2 + 5y^2 + 4z^2 + 4xy - 2xz - 8yz$$

1. (1,25 point) Donner une décomposition de Gauss en sommes de carrés, de q.
2. (0,5 point)En déduire la signature de q.
3. (0,5 point) Donner un exemple de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $q(x, y, z) > 0$.
4. (0,5 point) Donner un exemple de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $q(x, y, z) < 0$.

Exercice 3. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et q la forme quadratique définie par $q(x, y) = x^2 = y^2 + 6xy,\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Soit $\overrightarrow{u_1}= (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ et $\overrightarrow{u_2}= (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

1. (1,25 point) Vérifier que $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ est une base orthonormée de vecteurs propres pour M, et préciser les valeurs propres.
2. (0,75 point) On effectue le changement de variables $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ où $P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$. Donner l'expression de $q(x, y)$ en fonction de x' et y'.
3. (1,25 point) On considère la conique $\mathscr{C}$ d'équation $q(x, y) = 4$ dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, où $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Représenter $\mathscr{C}$ dans ce repère et préciser la nature de cette conique.

Exercice 4. Considérons la fonction f définie par $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = y^2 - x^2y + x^2$ et $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$.

1. (1,5 point) Représenter K et montrer que K est un compact de $\mathbb{R}^2$.
2. (2,75 points) Déterminer les points critiques de la fonction f et préciser leur nature. .

3. (0,5 point) Justifier que les extrema de f sur K, sont atteints en des points de K.
4. (1,5 point) Étudier les extrema de la fonction sur le bord de K.
5. (0,5 point) Déterminer le maximum et le minimun de la fonctions sur K

Exercice 5. Déterminez si les ensembles suivants dans $\mathbb{R}^2$, sont fermés, ouverts, bornés ou non.

1. (1,5 point) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$
2. (2 points) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y > 1\}$