Mathématiques 4.1

avril 2018

calculatrice et documents interdits

Barème indicatif. Durée 2h

Exercice 1 (6,5 points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, A une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice A relativement à la base canonique.

1. Soit p un projecteur, on rappelle que p est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$. Donner un polynôme annulateur de p. p est-il diagonalisable ? (justifier votre réponse). Quelles sont ses valeurs propres possibles ?
2. Soit φ un endomorphime de $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi \circ \varphi$ est un projecteur. Quelles sont les valeurs propres possibles pour φ ? φ est-il toujours diagonalisable ? (indication : considérer l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$).
3. On suppose dorénavant que p est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice relativement à la base canonique :
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Montrer que p est un projecteur de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base de Imp et une base de $Kerp$. Les vecteurs de base de Imp et $Kerp$ sont-ils des vecteurs propres de p ?
4. En déduire une matrice P inversible telle que, $A = PDP^{-1}$ où
$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
(On ne demande pas de calculer P^{-1})
5. Déterminer toutes les matrices diagonales D' telle que $D'^2 = D$.
6. En déduire une matrice M telle que $M^2 = A$ et M n'est pas la matrice d'un projecteur (on donnera M sous forme d'un produit de matrices qu'il est inutile d'effectuer).

Exercice 2 (3,5 points)
Soit $k \in \mathbb{R}$ et A la matrice,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ de matrice A relativement à la base canonique.

1. Déterminer la dimension de $Ker\varphi$.
2. Calculer et factoriser le polynôme caractéristique de A. Et donner la dimension des sous-espaces propres de φ
3. Sans calcul, montrer de deux façons différentes que A est diagonalisable pour tout $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 (5,5 points)
Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel.

1. Donner la définition d'une matrice symétrique de E.
2. Si M est une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, quelles sont ses valeurs propres possibles ?
3. Soit
$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$
   (a) A quelles conditions sur a, b, c, d, e et f, M est-elle orthogonale ? (on ne demande pas de résoudre le système obtenu)
   (b) On suppose de plus que $a + d + f = 1$.
   Sans calculer le polynôme caractéristique de M, et en utilisant le fait que deux matrices semblables ont la même trace, déterminer les valeurs propres de M avec leur multiplicité.

Exercice 4 (4,5 points)

1. Soit E un espace vectoriel, rappeler la définition d'un produit scalaire sur E.
   On suppose dorénavant $E = \mathcal{C}([0; 1]; \mathbb{R})$ et on considère le produit scalaire défini par : pour tout $f_1, f_2 \in E$
$$< f_1, f_2 >= \int_0^1 f_1(x)f_2(x)dx$$

2. En utilisant le procédé de Gram-Schmidt à $(1, X)$, déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}[X]$ relativement au produit scalaire ci-dessus.
3. Soit $F = \mathbb{R}[X]$ et soit g la fonction de E définie par $g(x) = x\ln(x)$, $\forall x \in]0, 1]$ et $g(0) = 0$. Calculer la projection orthogonale $p(g)$, de g sur F. (On ne demande pas de simplifier les fractions obtenues)
4. Montrer que $\|g - p(g)\|^2 = \|g\|^2 - \|p(g)\|^2$
5. En déduire,

$$\min_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 (x\ln(x) - bx - c)^2 dx$$

On pourra utiliser les résultats suivant :
$\int_0^1 x\ln(x)dx = -\frac{1}{4}$; $\int_0^1 x^2\ln(x)dx = -\frac{1}{9}$; $\int_0^1 x^2\ln(x)^2dx = \frac{2}{27}$