DS 4.1

Calculatrice et documents non autorisés - **Toutes les réponses seront justifiées.**

Exercice 1. (Vrai/faux)

1. En dimension finie, un endomorphisme admet un nombre fini de valeurs propres
2. Si la matrice A est diagonalisable alors A^2 aussi.
3. Tout endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension paire admet au moins une valeur propre.
4. La somme de deux matrices diagonalisables est diagonalisable.

Exercice 2.
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Donner le polynôme caractéristique de A. Que dire des valeurs propres et de la dimension des sous espaces propres ?
2.

(a) Sans Calcul, donner un polynôme annulateur de A.

(b) $P(X) = X - 2$ peut il être un polynôme annulateur de A ?

(c) Sans faire le calcul, que peut-on avoir comme polynôme annulateur minimal ?

3. Si possible diagonaliser la matrice en donnant la matrice de passage de la base canonique vers une base de vecteurs propres
4. Donner le polynôme minimal de A.

Exercice 3.
Soit $E = \mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne usuelle.

Soit p un endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique est $A = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A est une projection.
2. Que peut on en déduire quand à ses valeurs propres ? A est elle diagonalisable ? (sans calcul du polynôme caractéristique)
3. Déterminer ses espaces caractéristiques (projection de l'espace sur G parallèlement à F)
4. Montrer que p est une projection orthogonale.
5. Soit $u(1, 1, 1)$ Calculer la distance de u à G.

Exercice 4.

Soit $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

1. Que peut-on dire de la nature de cette matrice ?
2. Que peut on en déduire quand à ses valeurs propres ?
3. Diagonaliser dans une base orthonormé cette matrice.
4. Déterminer la nature géométrique de l'endomorphisme associé.

Exercice 5.

Soit $E = \mathbb{R}^2[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2, muni de l'application suivante. $\forall (P,Q) \in E^2, \langle P,Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

1. Vérifier que cette application est un produit scalaire.
2. Soit F l'ensemble des polynômes vérifiant $P(1) = 0$. On admet que F est un sev de E de dimension 2. En donner une base orthonormé à partir de la base $(X-1, (X-1)^2)$
   On ne cherchera pas à calculer la norme du 2ème vecteurs trouvé.
3. Donner la formule permettant de calculer la projection orthogonale du polynôme constant égal à 1 sur F.