# Mathématiques 4.1

avril 2019

calculatrice et documents interdits

Durée 2h

Exercice 1 Questions de cours

1. Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel, donner la définition d'un produit scalaire sur $E$.
2. Montrer que si $(v_1, v_2, ..., v_k)$ est une famille de vecteurs non nuls deux à deux orthogonaux, c'est une famille libre.

Exercice 2 On considère la matrice,

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ a & 3 & 2 \\ -3 & 2 & a \end{pmatrix}$$

1. Pour quelle(s) valeur(s) de $a$ cette matrice est-elle orthogonale ? Déterminer $A^{-1}$ pour cette (ces) valeur(s) de $a$.
2. Pour quelle(s) valeur(s) de $a$ cette matrice est-elle symétrique ?
3. Pour quelle(s) valeur(s) de $a$ cette matrice est-elle la matrice d'une symétrie ? (rappeler la définition d'une symétrie)

Exercice 3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de $A$.
2. Déterminer le(s) sous-espace(s) propre(s) et donner une base de chacun d'eux.
3. $A$ est elle diagonalisable ?
4. Montrer que $A$ est semblable à la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 Vrai Faux, on justifiera toutes les réponses

1. En dimension finie, un endomorphisme admet un nombre fini de vecteurs propres.
2. Soit $A$ une matrice carrée $n \times n$, si $A$ est diagonalisable, alors $A^2$ est diagonalisable.
3. Tout endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension impaire admet au moins une valeur propre.
4. Soit $A$ une matrice carrée $n \times n$, si $A^2 - 4A + 3I_n$ est égale à la matrice nulle, alors $A$ est diagonalisable.
5. Soit $A$ une matrice carrée $n \times n$, si $A^2 - 4A + 3I_n$ est égale à la matrice nulle, alors $A$ est inversible.

<u>Exercice 5</u>

On note $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées $2 \times 2$ à coefficients réels et $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques. On rappelle que la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est :

$$\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

On munit $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ du produit scalaire :

$$< A, B >= \mathrm{tr}(A.{}^tB), \ \forall A, B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$$

On notera $|| \ ||$ la norme associée à ce produit scalaire. Soient

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Donner la forme générale d'une matrice de $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$, et en déduire que la famille $(M_1, M_2, M_3)$ est une famille génératrice de $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $(M_1, M_2, M_3)$ est une famille libre de $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$.
3. Quelle est la dimension de $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})^\perp$ ?
4. (Indication : cette question ne nécessite aucun calcul) Soit $p$ le projecteur orthogonal sur $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$. Quelle est la dimension de $Imp$ ? de $Kerp$ ? Soit $A$ une matrice non nulle quelconque de $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})^\perp$, justifier que $\mathscr{B} = (A, M_1, M_2, M_3)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et donner la matrice de $p$ relativement à cette base.
5. Vérifier que $(M_1, \frac{1}{\sqrt{2}} M_2, M_3)$ est une base orthonormée de $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$.
6. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer $p(B)$ et $B - p(B)$.

(b) En déduire une base de $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})^\perp$.

(c) Déterminer la distance de $B$ à $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$.

7. En utilisant le procédé de Gram-Schmidt, orthonormaliser la base $(M_1, \frac{1}{\sqrt{2}}M_2, M_3, B)$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.