DS1 maths 4.1 2023-2024

Le barème est donné à titre indicatif,
documents non autorisés,
calculatrice "collège" autorisée, les calculatrices "graphiques" ne sont pas autorisées

Exercice 1. (1,5 point) Répondre par vrai ou faux. On ne demande pas de justification. (-0,5 point par réponse fausse ou pas de réponse. A partir de 3 erreurs : 0 point à l'exercice).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ de matrice A relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

- Si λ est une valeur propre de multiplicité $k \geqslant 2$ de φ, alors dim Ker$(\varphi - \lambda Id_{R^n}) \geqslant 2$
- Si dim Ker$(\varphi - \lambda Id_{R^n}) \geqslant 2$, alors λ est une valeur propre de multiplicité supérieure ou égale à 2 de φ.
- Soient $\lambda_1, ..., \lambda_r$ et les valeurs propres de A et $E_{\lambda_1} .., E_{\lambda_r}$ les sous-espaces propres associés. Si A est diagonalisable, alors $E_{\lambda_1}, \oplus ... \oplus E_{\lambda_r} = \mathbb{R}^n$
- φ est diagonalisable si et seulement si il existe une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de φ.
- φ est diagonalisable si et seulement si φ a n valeurs propres simples.
- Si $\varphi - \lambda Id_{\mathbb{R}^n}$ est injectif alors λ est une valeur propre de φ.
- Si φ n'est pas injectif alors 0 est valeur propre de φ.

Exercice 2. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. (0,5 point) Calculer le polynôme caractéristique de A et en déduire les valeurs propres de A.
2. (0,75 point) Trouver une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
3. (1,25 point) En déduire la résolution du système différentiel :

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - 4x_2(t) \\ x_2'(t) = -2x_1(t) - x_2(t) \end{cases}$$

Exercice 3. Soit $n \geqslant 1$ et $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$. On notera M_0 la matrice nulle de $\mathscr{M}(\mathbb{R})$ et I_n la matrice identité.

1. On suppose que $A^2 + 2A + I_n = M_0$.
   (a) (0,75 point) Justifier que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A.
   (b) (0,75 point) Montrer que si λ est valeur propre de A alors $\lambda = -1$
   (c) (0,75 point) Si $A \neq -I_n$, quel est le polynôme minimal de A ?
   (d) (0,5 point) En déduire que si $A \neq -I_n$, alors A n'est pas diagonalisable.
   (e) (0,5 point) Soit $B = A + I_n$. Montrer que B est nilpotente.

2. On pose :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

   (a) (0,5 point) Vérifier que $A^2 + 2A + I_n = M_0$

   (b) (1,25 points) En utilisant la question 1.(e) et la formule du binôme de Newton, calculer A^n en fonction de n.

Exercice 4. Soit E un espace euclidien, on notera $\langle , \rangle$ son produit scalaire et $|| \; ||$ sa norme associée.

1. (1 point) Donner la définition d'un produit scalaire, en détaillant les propriétés.
2. (0,75 point) Soient $u, v \in E$ tels que $u + v$ et $u - v$ sont orthogonaux. En utilisant les propriétés ci-dessus, démontrer que $\|u\| = \|v\|$
3. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ non nulle, qui conserve l'orthogonalité (c'est-à-dire que pour tout couple $(x, y) \in E$, si x est orthogonal à y, alors $f(x)$ est orthogonal à $f(y)$) et soit $(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de E.

   (a) (0,5 point) Montrer que $e_i + e_j$ et $e_i - e_j$ sont orthogonaux, pour tout $i \neq j$

   (b) (0,75 point) En déduire que $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\| \; \forall i, j$.

   (c) (1,5 point) On pose $\|f(e_i)\| = \lambda \; \forall i$, montrer que pour tout $x \in E$ on a $\|f(x)\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2$

Exercice 5.
On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, et on pose $F = ((1, 0, -1), (1, -1, 0))$.

1. (1,25 point) Appliquer la méthode de Gram-Schmidt à la famille libre F.
2. (0,75 point) Soit $v = (1, 1, 1)$ Calculer le projeté orthogonal de v sur $vect(F)$.
3. (0,75 point) Calculer la distance entre v et $vect(F)$.

Exercice 6.
On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Dans cet exercice, on répondra aux questions sans calculer le polynôme caractéristique.

1. (0.5 point) Peut-on dire si cette matrice est diagonalisable ?
2. (1,5 point) Quel est le rang de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   En déduire une valeur propre λ, de la matrice A, la dimension du sous-espace propre associé E_λ, et une équation de E_λ.

3. (0,5 point) Donner une base de l'orthogonal de E_λ.
4. (1,25 point) En déduire le spectre de A.