DS 4.1

DS2 maths 4.1 2021-2022

Le barème est donné à titre indicatif,
documents non autorisés,
calculatrice "collège" autorisée, les calculatrices "graphiques" ne sont pas autorisées

---

Exercice 1. (4,5 points)
Dans un repère orthonormé (O, i, j), on considère la conique $\mathscr{C}$, d'équation

$$x^2 + xy + y^2 + x - y = 0$$

1. (1,5 point) Déterminer une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = PDP^{-1}$$

2. (1,5 point) Déterminer une base orthonormée $\mathscr{B}' = (v_1, v_2)$ et un point A de $\mathbb{R}^2$, telle que dans le repère (A, v_1, v_2) l'équation de $\mathscr{C}$ devienne $\frac{1}{2}s^2 + \frac{3}{2}t^2 = 1$.
3. (0,5 point) Donner la nature de $\mathscr{C}$
4. (0,5 point) Dessiner $\mathscr{C}$ dans le repère (A, v_1, v_2).
5. (0,5 point) Dessiner $\mathscr{C}$ dans (O, i, j).

Exercice 2. (2,5 points)

1. Déterminer la signature des formes quadratiques suivantes en utilisant la décomposition de Gauss.

(a) (1 point) $q(x_1, x_2, x_3) = 5x_1x_2 + 2x_2x_3 + 6x_1x_3$

(b) (1 point) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_2x_3$

2. (0,5 point) Sans l'appliquer, expliquer l'autre méthode possible pour obtenir la signature de ces formes quadratiques.

Exercice 3. (3 points) Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2 + y^2 < 1\}$

1. (0,5 point) Dessiner D
2. (1 point) D est il un ouvert ?
3. (1 point) D est il un fermé ?
4. (0,5 point) Donner un exemple d'ensemble de $\mathbb{R}^2$ qui soit ouvert et fermé à la fois. (On ne demande pas de justification)

Exercice 4. (1 point)
L'application φ définie par :

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & |x| \end{array}$$

est-elle une norme sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 5. (9 points)
Un glacier fabrique deux types de glaces : de la glace au chocolat et de la glace à la vanille. Si en une semaine il fabrique x kilo de glace au chocolat et y kg de glace à la vanille, son coût de production est :

$$f(x,y) = 600 + 200x + 200y - 2x^2y$$

(Remarque : le coût peut être positif s'il perd de l'argent ou négatif s'il en gagne)

1. (1,5 point) Déterminer les points critiques de f.
2. (2 points) Montrer que f n'a pas d'extremum local.
3. En tout, il ne peut pas fabriquer plus de 300 kg de glace.

(a) (0,5 point) Représenter l'ensemble :

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x+y \leqslant 300\}$$

(b) (1,5 point) Montrer que T est un compact de $\mathbb{R}^2$.

(c) (1 point) Justifier que $\inf_T f$ est atteint en au moins un point de T, et plus précisément sur le bord de T.

(d) (1 point) Etudier les variations de la fonction $x \mapsto f(x, 300-x)$ sur $[0, 300]$

(e) (1 point) Déterminer $\min_T f$.

(f) (0,5 point) Quelles quantités de glace au chocolat et à la vanille doit-il produire pour minimiser ses coûts ?