DS2 M4.1 2023-2024

Exercice 1 :

1) V 2) V 3) V 4) V 5) F 6) V 7) F

Exercice 2 :

1) $Q = x^2 + 2xy + y^2$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) symétrique $\Rightarrow$ diagonalisable dans une BON

3) changement de base pour une forme quadratique

$$M' = {}^tP\, M\, P.$$

Diagonalisation $D = P^{-1} M P$

si P est orthogonale ${}^tP = P^{-1}$ donc $M' = D$.

4) $S_p = \{0; 2\}$

$E_0 = \text{Vect}\, V_1 = \text{Vect}\ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix}$

E_2 V_2 $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$

5) Dans $B_1(O, V_1, V_2)$ $X = P X_1$ $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + y_1) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x_1 + y_1) \end{cases}$$

donc $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{B}_1$: $2y_1^2 + 3(x_1+y_1) - 2(-x_1+y_1) + 1 = 0$

$$2y_1^2 + 5x_1 + y_1 + 1 = 0$$

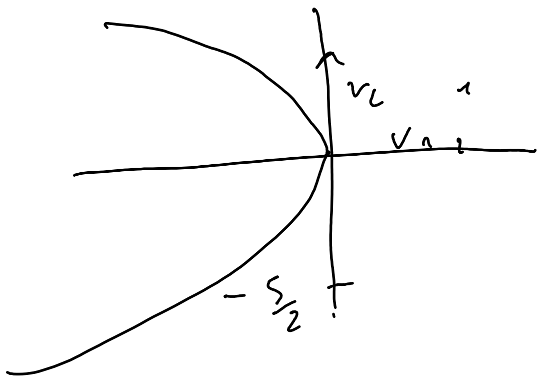
6) $\mathcal{C} \iff 2\left(y_1 + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} = -5x_1$

$$2\left(y_1 + \frac{1}{4}\right)^2 = -5\left(x_1 + \frac{1}{40}\right)$$

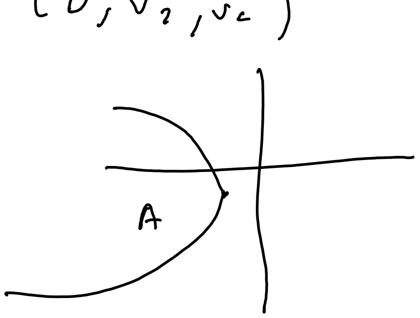
$A\left(-\frac{1}{4} ; -\frac{1}{40}\right) \rightarrow 2Y^2 = -5X$

$$Y^2 = -\frac{5}{2}X$$

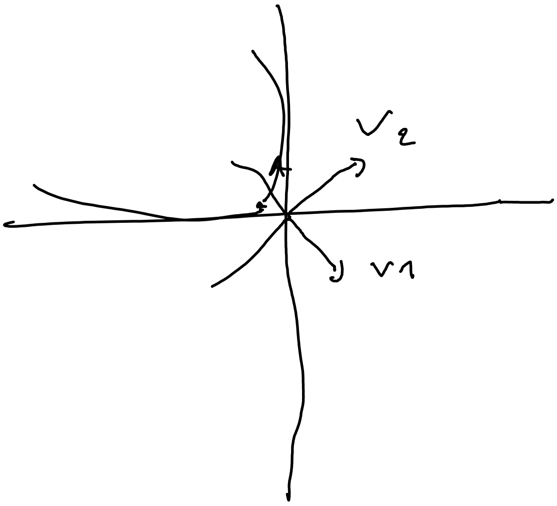
7) Dans (A, v_1, v_2) : parabole.



Dans (O, v_1, v_2)



Dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$



Exercice 3 :

1) Norme :

- $N(f) \geq 0$ oui car $| \; |$
- $N(\lambda f) = |\lambda f(0)| + \int_0^1 |\lambda f'(t)| \, dt$

$$= |\lambda| N(f) \; .$$

- $N(f) = 0 \Rightarrow \underbrace{|f(0)|}_{\geq 0} = 0$ et $\int_0^1 \underbrace{|f'(t)|}_{\geq 0} dt = 0$

donc $f(0) = 0$ et $f'(t) = 0$

donc $f(t) = K$

$K = 0 \quad f(t) = 0$.

$N(f+g) \leq N(f) + N(g)$

car $|a+b| \leq |a| + |b|$

et $\int |f+g| \leq \int |f| + \int |g|$

2) $g(x) = | f_n(x) - f(x) | = e^x \cdot \frac{1}{n}$

$$N(g) = |g(0)| + \int_0^1 \left|\frac{e^t}{n}\right| dt$$

$$= \frac{1}{n} + \left[\frac{e^t}{n}\right]_0^1 = \frac{1}{n} + \frac{e-1}{n} = \frac{e}{n} \xrightarrow{+\infty} 0$$

donc f_n CV vers f pour N.

Exercice 4 :

$$f(x, y) = 2x^3 - 15x^2 + 24x - 9y^2 + 1$$

1) $\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 - 30x + 24 = 6(x^2 - 5x + 4)$

$\Delta = 25 - 16 = 9$

$x_1 = \frac{5-3}{2} = 1$

$x_2 = \frac{5+3}{2} = 4$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -18y$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 & \rightarrow x = 1 \text{ ou } x = 4. \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 & \rightarrow y = 0 \end{cases}$$

2 points critiques $A(1, 0)$ et $B(4, 0)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x - 30$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -18$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$

en A : $Q_A(h_1, h_2) = -18x^2 - 18y^2$ $\quad S(0, 2)$

max local

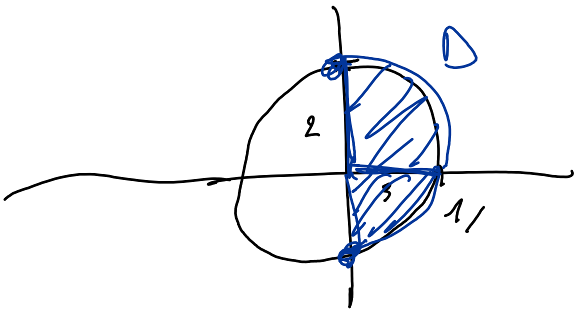
en B : $Q_A(h_1, h_2) = 18x^2 - 18y^2$ $\quad S(1, 1)$ point col

ni min ni max.

2)

$$9y^2 + 4x^2 = 36$$

$$\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{9} = 1 \quad \text{ellipse :}$$



3) $\forall (x,y) \in D$ $\quad 9y^2 \leq 36$

$$y^2 \leq 4$$

$$|y| \leq 2$$

et $4x^2 \leq 36 - 9y^2 \leq 36$

$$|x| \leq 3$$

donc $\|(x,y)\|_\infty \leq 3$ $\quad$ D est borné.

4) $U_n \begin{vmatrix} x_n \\ y_n \end{vmatrix}$ une suite CV de D $\forall x_n, y_n$ vers $L \begin{vmatrix} l_1 \\ l_2 \end{vmatrix}$

$$9y_n^2 \leq -4x_n^2 + 36 \quad \text{et} \quad x_n \geq 0$$

par passage à la limite

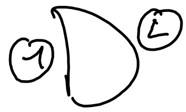
$$9 l_2^2 \leq -4 l_1^2 + 36 \quad \text{et} \quad l_1 \geq 0.$$

donc $L \in D$ $\quad$ D est un fermé.

5) f continue sur un compact donc atteint ses extrema.

6) $A = (1, 0)$ est dans D. et $f(A) = 12$

7) Sur le bord.



① : $x = 0$ et $y \in [-2, 2]$

$$f(0, y) = -9y^2 + 1$$
$$f' = -18y$$

	-2		0		2
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	1	$\searrow$	

② $\to$ $9y^2 = -4x^2 + 36.$ $\quad x : 0 \to 1$

$$f(x,y) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 4x^2 - 36 + 1$$
$$= 2x^3 - 11x^2 + 24x - 35.$$
$$f'(x) = 6x^2 - 22x + 24 = 6\left(x^2 - \frac{11}{3}x + 4\right)$$
$\Delta < 0$

x	0		3
f'		$+$	
f	-35	$\nearrow$	-3

Max : entre $f(2)$; $f(0)$ et $\underline{f(A) = 12}$