

Exercice 1

1) φ est un produit scalaire : $\varphi: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$
 forme bilinéaire symétrique définie positive
 $\varphi(x, y) = \varphi(y, x) \quad \forall x, y \in E$
 $\varphi(x, x) \geq 0$
 $\varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$
 $\varphi(\alpha x + y, b) = \alpha \varphi(x, b) + \varphi(y, b)$ linéaire à gauche
 idem à droite

2) $(v_1, \dots, v_k) \in E^k$ orthogonaux.

$$\alpha_1, \dots, \alpha_k \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i = 0$$

$$\text{alors } \varphi\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i v_i, v_j\right) = 0 = \sum_{i=1}^k \alpha_i \varphi(v_i, v_j)$$

$$= 0 \text{ si } i \neq j$$

$$\neq 0 \text{ sinon.}$$

$$= \alpha_i \|v_i\|^2 \text{ donc } \alpha_i = 0$$

$$\text{et } v_i \neq 0$$

la famille est libre.

Exercice 3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$1) \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda(2-\lambda)+1)$$

$$= (1-\lambda)(-\lambda(2-\lambda)+1)$$

$$= (1-\lambda)^3$$

2) $S_p A = \{1\}$ $1 \leq \dim E_\lambda \leq 3$

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\text{rg}(A - I) = 1$
 donc $\dim E_\lambda = 1$

$$\dim \ker (A-I) = \dim E_1 = 2.$$

$$\text{et } E_1 = \text{Vect} \left(\begin{array}{c|c} e_1 & e_2 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{array} \right)$$

libre donc base de E_1

3) $\dim E_1 \neq 3$ A n'est pas diagonalisable

4) Soit u / $\text{Mat}_{B'} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B'(e_1, e_2; u)$ alors $Au = e_2 + u$

$$\begin{pmatrix} x \\ -z \\ y+2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

par exemple

donc $\begin{cases} x=0 \\ -y-z=1 \\ y+z=-1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=-1-z \end{cases}$$

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\text{Mat}_{B'} A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_D$ donc A et B sont semblables

Exercice 4:

1) Non : un nombre fini de valeurs propres mais E_λ est un espace vectoriel $\rightarrow$ infinité de vecteurs propres

2) Si A est diag $\exists P \in M_n(\mathbb{R})$ / $A = P D P^{-1}$
donc $A^2 = P D P^{-1} P D P^{-1}$
 $= P D^2 P^{-1}$

donc A^2 est semblable à D^2
et D^2 est aussi une matrice diagonale.

3) $\det(A - \lambda I)$ est de degré $\dim E$
 si $\dim E$ est impaire le polynôme admet
 au moins 1 racine réelle donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ pour A

4) $A^2 - 4A + 3I = 0$

$P(X) = X^2 - 4X + 3$ est un polynôme annulateur

$$\Delta = 16 - 12 = 4 > 0 \quad X_1 = \frac{4-2}{2} = 1$$

$$X_2 = \frac{4+2}{2} = 3$$

$P(X) = (X-1)(X-3)$ scindé donc A est diagonalisable.

5) $I = \frac{1}{3}(4A - A^2) = \frac{1}{3}(4I - A) \cdot A$

A est bien inversible $A^{-1} = \frac{1}{3}(4I - A)$

Exercice 5:

1) $S^2(\mathbb{R}) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad a, b, c \in \mathbb{R}$

$$= a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{M_1} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{M_2} + c \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_3}$$

famille génératrice de $S_2(\mathbb{R})$

$$2) \text{ Soit } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \quad / \quad \alpha M_1 + \beta M_2 + \gamma M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{alors } \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha = 0 = \beta = \gamma.$$

$\{M_1, M_2, M_3\}$ est une famille libre de $S_2(\mathbb{R})$

$$3) \dim(S_2(\mathbb{R})) = 3 \quad (M_1, M_2, M_3) \text{ est une base de } S_2(\mathbb{R}).$$

4) p projection orthogonale sur $S_2(\mathbb{R})$

$$\dim p = S_2(\mathbb{R}) \quad \dim \text{Im } p = 3$$

$$\text{donc } \dim \text{Ker } p = \dim M_2(\mathbb{R}) - \dim \text{Im } p = 4 - 3 = 1$$

$$\text{Soit } A \in S_2(\mathbb{R})^\perp \text{ donc } S_2(\mathbb{R})^\perp = \text{Vect } A.$$

$$S_2(\mathbb{R}) \oplus S_2(\mathbb{R})^\perp = M_2(\mathbb{R}) \quad (\text{espace supplémentaire})$$

$$\text{donc } M_2(\mathbb{R}) = \text{Vect} \left(\underbrace{A, M_1, M_2, M_3}_{\substack{\text{base de } M_2(\mathbb{R}) \\ 4 \text{ vecteurs g\u00e9n\u00e9rateurs de } M_2(\mathbb{R})}} \right)$$

$$S_2(\mathbb{R})^\perp = \text{Ker } p.$$

$$\text{donc } \text{Mat}_B p = \begin{pmatrix} p(A) & p(M_1) & p(M_2) & p(M_3) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} A \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{matrix}$$

$$A \in \text{Ker } p \quad p(A) = 0$$

$$M_1, M_2, M_3 \in \text{Im } p \text{ et } p \circ p = p \text{ donc si } M_1 = p(A) \\ p(M_1) = p \circ p(A) = p(A) = M_1.$$

5) M_1 et M_3 sont dans la base canonique donc
 $\|M_1\| = \|M_3\| = 1$ et $M_1 \perp M_3$.

$$\langle M_2 | M_2 \rangle = \text{tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \text{tr} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 2$$

$$\|M_2\| = \sqrt{2} \quad \text{donc} \quad \left\| \frac{1}{\sqrt{2}} M_2 \right\| = 1$$

$$\langle M_2 | M_3 \rangle = \text{tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \text{tr} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle M_1 | M_2 \rangle = \text{tr} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \text{tr} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

$(M_1; \frac{1}{\sqrt{2}} M_2; M_3)$ est bien une base orthogonale de $S_2(\mathbb{R})$

$$6) B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$a) p(B) = \langle M_1 | B \rangle \cdot M_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle M_2 | B \rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} M_2 + \langle M_3 | B \rangle M_3$$

$$= \text{tr} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot M_1 + \frac{1}{2} \text{tr} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot M_2 + \text{tr} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} M_3$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5/2 \\ 5/2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B - p(B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 5/2 \\ 5/2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) B - p(B) \in \text{Ker } p \text{ donc } S_2(\mathbb{R})^\perp = \text{Vect}(B - p(B))$$

$$c) d(B; S_2(\mathbb{R})^\perp) = \|B - p(B)\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \sqrt{\text{tr} \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$= \sqrt{\text{tr} \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$7) (M_1; \frac{1}{\sqrt{2}} M_2; M_3; B)$$

procédure de Gram-Schmidt

$$e_1 = \frac{M_1}{\|M_1\|} = M_1$$

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} M_2 - \underbrace{\langle M_1 | M_2 \rangle M_1}_{0 \text{ car } B \text{ ON.}} = \frac{1}{\sqrt{2}} M_2$$

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} M_2 / \left\| \frac{1}{\sqrt{2}} M_2 \right\| = \frac{1}{\sqrt{2}} M_2$$

$$\text{idem } e_3 = M_3$$

$$w_4 = B - \underbrace{(\langle M_1 | B \rangle M_1 + \langle M_2 | B \rangle M_2 + \langle M_3 | B \rangle M_3)}_{p(B)}$$

$$w_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e_4 = \frac{2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 :

$$A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -2 & 6 & -3 \\ a & 3 & 2 \\ -3 & 2 & a \end{pmatrix}$$

$$1) A \text{ orthogonale} \quad \langle c_1 | c_2 \rangle = 0$$

$$-12 + 3a - 6 = 0 \quad a = 6.$$

$$\text{on a bien } \langle c_2 | c_3 \rangle = \langle c_1 | c_3 \rangle = 0$$

$$\text{et } \|c_1\| = \|c_2\| = \|c_3\| = 1$$

$$A^{-1} = {}^t A.$$

2) $a = 6$.

3) Une symétrie si $s \circ s = \text{id}$.

ici $\text{Mat } s \circ s = A \cdot A = \frac{1}{49} \begin{pmatrix} 4+6a+9 & 0 & 6+12-3a \\ a-6 & 6a+9+4 & 6-a \\ 6-a & -12+2a & 13+a^2 \end{pmatrix}$

$a = 6$ donne $A \cdot A = \text{Id}$.