Analyse des Systèmes de Production II

P. Bonhomme

Institut National des Sciences Appliquées - Centre Val de Loire

November 5, 2018

Introduction

Pour modéliser l'évolution au cours du temps (la dynamique) de systèmes biologiques, par exemple celle d'un organisme, d'une substance, d'un ecosystème, on choisit souvent des modèles aléatoires. Les plus simples de ces modèles aléatoires sont les chaînes de Markov qui, dans le cas particulier sont faciles à utiliser car il n'y a pratiquement aucun prérequis mathématique.

Introduction

Les chaines de Markov sont intuitivement très simples à définir.

Vous avez dit simple !!

1. Un système peut admettre un certain nombre d'états différents.
2. L'état change au cours du temps discret.
3. A chaque changement, le nouvel état est choisi avec une distribution de probabilité fixée au préalable, et ne dépendant que de l'état présent.

Un peu d'histoire !!

Andreï Andreïevitch Markov (2 juin 1856 - 20 juillet 1922) était un mathématicien russe.
Né en 1856 à Riazan, il étudia à l'Université d'État de Saint-Pétersbourg en 1874 sous la tutelle de Tchebychev et en 1886, il devint membre de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg. Ses travaux sur la théorie des probabilités l'ont amené à mettre au point les chaînes de Markov qui l'ont rendu célèbre.
Il étudia en 1913 la succession des lettres dans le roman Eugène Onéguine d'Alexandre Pouchkine2. Markov nota que les lettres utilisées suivent en fait des contraintes très précises: chaque lettre dépend étroitement de la précédente. On appela par la suite les groupements dans lesquels une lettre d'un texte dépend de la précédente - avec une certaine probabilité - une chaîne de Markov.

Dynamiques aléatoires

On modélise avec des chaînes de Markov l'évolution au cours du temps de quantités X qui peuvent prendre un nombre fini d'états $X = x_1, X = x_2, \ldots, X = x_n$ et qui passent de l'état x_i à l'instant t à l' état x_j à l'instant suivant $t+1$ avec une probabilité p_{ij} donnée.
Les nombres $p_{ij} = P(X_{t+1} = x_j / X_t = x_i)$ vérifient donc
$0 \leq p_{ij} \leq 1$ et $\sum_{j=0}^{n} p_{ij} = 1$.
Puisque si la chaine est dans l'état x_i à un instant, elle sera nécessairement dans l'un des états possibles $x_1, \ldots, x_n$ l'instant suivant et donc $p_{i1} + p_{i2} + \ldots + p_{in} = 1$.

L'expression $P(X_{t+1} = x_j / X_t = x_i)$ s'appelle une probabilité conditionnelle et représente la "probabilité que la quantité X vaille x_j à l'instant $t+1$ sachant qu'elle valait x_i à l'instant t".
Pour définir une chaine de Markov il faut donc deux ingrédients de base :

- L'espace des états $S := \{x_1, \ldots, x_n\}$ connu que l'on supposera fini
- La matrice de transition ou de passage :

$$\mathbb{P} = (p_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

A noter que cette matrice est appelée matrice stochastique parce que ses coefficients sont tous compris entre 0 et 1 et la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1.

Une grenouille (Froggy) est sur un étang comprenant 4 nénuphars (numérotés de 1 à 4). La grenouille saute de nénupar en nénuphar. Le nénuphar destination du saut ne dépend que du nénuphar de départ.
La grenouille n'a pas de mémoire. Si X_n représente le numéro du nénuphar où est la grenouille après n sauts, on peut définir : $p_{ij}(n) = p(X_{n+1} = j | X_n = i)$. C'est la probabilité conditionnelle que la grenouille fasse un saut du nénuphar i au nénuphar j à la date n. Ceci signifie implicitement que ces probabilités conditionnelles ne dépendent pas du comportement antérieur à l'instant n de la grenouille :

$$
\begin{aligned}
p_{ij}(n) = p(X_{n+1} = j | X_n = i) = p(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = 1) \\
p(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = 2) \\
p(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = 3) \\
p(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = 4)
\end{aligned}
$$

La classe des processus verifiant cette propriété est caractérisée par le fait que l'état présent du processus, cad son état à l'instant n, résume toute l'information nécessaire pour connaître son évolution future.
En d'autres termes, la prévision de cette dernière ne peut être améliorée par une connaissance supplémentaire du passé du processus, c'est à dire par la connaissance de ses états aux instants $\leq n - 1$.

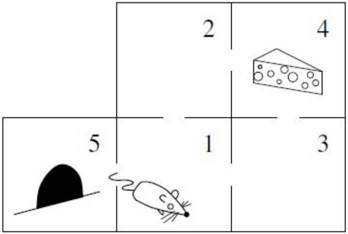
Cette propriété (sans mémoire) est connue sous le nom de propriété de Markov.
Elle s'exprime par :

$$p(X_{n+1} = j | X_n = i) = p(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0)$$

pour $n \geq 0$ et $j, i, i_{n-1}, \ldots, i_0 \in S$.
Une chaîne de Markov à temps discret est un processus stochastique qui vérifie cette propriété.
Nous ne nous intéresserons qu'au chaînes de Markov homogènes, c'est à dire pour lesquels les probabilités de transition sont indépendantes du temps ($p_{ij}(n) = p_{ij}$).

Quelques exemples de chaînes de Markov

(La souris dans le labyrinthe). Une souris se déplace dans le labyrinthe de la figure ci-dessous. Initialement, elle se trouve dans la case 1. A chaque minute, elle change de case en choisissant, de manière équiprobable, l'une des cases adjacentes. Dès qu'elle atteint soit la nourriture (case 4), soit sa tanière (case 5), elle y reste.

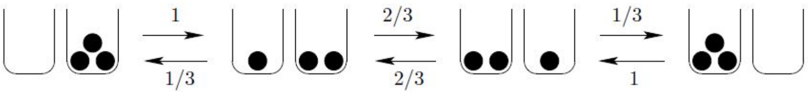


Quelques exemples de chaînes de Markov

(Jeu de Pile ou Face). Anatole et Barnabé jouent à la variante suivante de Pile ou Face. Ils jettent une pièce de monnaie (parfaitement équilibrée) de manière répétée. Anatole gagne dès que la pièce tombe trois fois de suite sur Face, alors que Barnabé gagne dès que la suite Pile-Face-Pile apparaît.

Quelques exemples de chaînes de Markov

(Modèle d'Ehrenfest). C'est un système motivé par la physique, qui a été introduit pour modéliser de manière simple la répartition d'un gaz entre deux récipients. N boules, numérotées de 1 à N, sont réparties sur deux urnes. De manière répétée, on tire au hasard, de façon équiprobable, un numéro entre 1 et N, et on change d'urne la boule correspondante.



Quelques exemples de chaînes de Markov

(Le problème du voyageur de commerce). C'est un exemple classique de problème d'optimisation. Un voyageur de commerce doit visiter N villes, en revenant à son point de départ après être passé exactement une fois par chaque ville. Comment choisir l'ordre des villes de manière à minimiser la longueur du circuit? La difficulté est que le nombre de circuits possibles croît extrêmement vite avec le nombre N de villes, beaucoup plus vite qu'exponentiellement. En effet, il y a $N!$ permutations possibles de l'ordre des villes. Si l'on ne tient compte ni de la ville de départ, ni du sens de parcours, il reste $(N-1)!/2$ circuits possibles. Calculer les longueurs de tous ces circuits devient irréalisable dès que N dépasse 20 environ.

Quelques exemples de chaînes de Markov

(Le problème du voyageur de commerce - suite). On peut tenter de trouver une solution approchée par approximations successives. Partant d'un circuit initial, on le modifie légèrement, par exemple en échangeant deux villes. Si cette modification raccourcit la longueur du circuit, on continue avec le circuit modifié. Si elle le rallonge, par contre, on rejette la modification et on en essaie une autre.

Le problème avec cette méthode est que le système peut se retrouver piégé dans un minimum local, qui est très différent du minimum global recherché de la longueur. On peut en effet se retrouver "bloqué" dans un circuit plus court que tous ses voisins (obtenus en permutant deux villes), mais une permutation de plus de deux villes pourrait raccourcir le circuit.

Quelques exemples de chaînes de Markov

(Le problème du voyageur de commerce - suite). Une variante plus efficace de cette méthode est celle du recuit simulé. Dans ce cas, on ne rejette pas toutes les modifications qui allongent le circuit, mais on les accepte avec une certaine probabilité, qui décroît avec l'allongement. De cette manière, le processus peut s'échapper du minimum local et a une chance de trouver un minimum plus profond.

La terminologie vient de la métallurgie : Dans un alliage, les atomes des différents métaux sont disposés de manière plus ou moins régulière, mais avec des imperfections. Moins il y a d'imperfections, plus l'alliage est solide. En réchauffant et refroidissant plusieurs fois l'alliage, on donne aux atomes la possibilité de se réarranger de manière plus régulière, c'est-à-dire en diminuant l'énergie potentielle. A nouveau, on se pose les questions suivantes :

1. Comment choisir les probabilités d'acceptation des modifications?
2. Comment la probabilité de s'approcher à une certaine distance du minimum cherché dépend-elle de la longueur de la simulation?

Un modèle de migration de cotes de crédit utilisant les chaînes de Markov

3-602-84

Modèles probabilistes et stochastiques de la gestion

Karine Béguin et Geneviève Gauthier

HEC Montréal

Introduction I

1. Les cotes de crédit sont assignées aux entreprises et aux gouvernements par des firmes telles que Standard & Poor's, A.M. Best Company, Moody's Investor's Service, Duff & Phelps et bien d'autres.
2. Ces cotes assignées par ces firmes de cotation, quoique notées différemment, sont presque équivalentes d'une firme à l'autre.
3. Les éléments étudiés lors de l'évaluation d'une entreprise ou d'un gouvernement sont la validité de son surplus, la qualité de ses actifs, la gestion du passif et de l'actif, les risques de réinvestissement, les entrées des flux monétaires futurs. De plus, sont étudiés les plans stratégiques, les compétences dans le domaine de la gestion, etc.
4. La cotation d'une entreprise peut être différente d'une firme à l'autre selon que certains aspects financiers ont été pris en considération ou non.

Introduction II

5. Bien entendu, une cote de crédit élevée est plus intéressante qu'une cote basse quand vient le temps d'investir dans l'une de ces entreprises.
6. Une compagnie qui reçoit une bonne cote de crédit est supposée être peu risquée. Ainsi, les institutions financières lui prêteront des fonds à un taux d'intérêt inférieur à celui accordé à une entreprise jugée plus risquée.
7. Cependant, une cote de crédit élevée n'est pas une garantie en soit.
8. Le but de ce travail est de modéliser les mouvements futurs des cotes de crédit d'une compagnie.

Introduction III

9. La firme Standard & Poors a choisi les cotes de crédit AAA, AA, A BBB, BB, B et CCC. La cote AAA étant la meilleure.
10. Il y a aussi la cote "défaut" qui est implicite et qui est attribuée lorsqu'une firme ne rencontre plus ses obligations (objectifs financiers!!!).
11. Standard & Poors a aussi développé une méthode permettant de modéliser le risque de crédit associé à un portefeuille d'obligations, de prêts, de lettres de crédit, etc.
12. C'est une partie de cette méthode, connue sous le nom de CreditMetrics, qui fait l'objet de cette série d'exercices.
13. Il est possible d'obtenir le document technique de Standard & Poors, contenant quelques centaines de pages, sur leur site web, à l'adresse http://www.riskmetrics.com/research/techdocs/index.cgi.

Notation et hypothèses I

Afin d'estimer les probabilités de passer d'une cote de crédit à une autre, il est possible de procéder comme suit :

1. Il faut d'abord préciser la longueur d'une période de temps. Disons que la longueur est une année. Ce choix est arbitraire, nous aurions pu choisir 6 mois, un mois, etc.
2. Nous choisissons une cote de crédit, disons AA, et dénombrons le nombre N_{AA} de firmes qui au début de l'année possèdent la cote AA. À la fin de la période, c'est-à-dire à la fin de l'année, nous dénombrons la quantité $n_{AA,AAA}$ de ces firmes qui ont maintenant la cote AAA; le nombre $n_{AA,AA}$ de ces firmes qui ont gardé la cote AA; le nombre $n_{AA,A}$ de ces firmes qui sont maintenant à la cote A; ..., ainsi que le nombre $n_{AA,Défaut}$ de ces firmes qui n'ont pas rencontré leurs obligations au cours de l'année.

Notation et hypothèses II

3. Le ratio $p_{AA,BBB} = \frac{n_{AA,BBB}}{N_{AA}}$ est un estimé de la probabilité qu'une firme côtée AA au début de l'année soit côtée BBB à la fin de l'année (fin de la période).
4. La cote "défaut" est particulière puisqu'une fois en situation de défaut, nous supposons que la firme le restera pour toujours, c'est à dire que $p_{Défaut,AAA} = 0$, ..., $p_{Défaut,CCC} = 0$ et $p_{Défaut,Défaut} = 1$.

Notation et hypothèses III

5. La matrice de transition annuelle (car la période de temps choisie est d'une année) est estimée par

$$\mathbf{M} = \tag{1}$$

$$\begin{pmatrix}
p_{AAA,AAA} & p_{AAA,AA} & p_{AAA,A} & \cdots & p_{AAA,CCC} & p_{AAA,Défaut} \\
p_{AA,AAA} & p_{AA,AA} & p_{AA,A} & \cdots & p_{AA,CCC} & p_{AA,Défaut} \\
p_{A,AAA} & p_{A,AA} & p_{A,A} & \cdots & p_{A,CCC} & p_{A,Défaut} \\
p_{BBB,AAA} & p_{BBB,AA} & p_{BBB,A} & \cdots & p_{BBB,CCC} & p_{BBB,Défaut} \\
p_{BB,AAA} & p_{BB,AA} & p_{BBB,A} & \cdots & p_{BB,CCC} & p_{BB,Défaut} \\
p_{B,AAA} & p_{B,AA} & p_{B,A} & \cdots & p_{B,CCC} & p_{B,Défaut} \\
p_{CCC,AAA} & p_{CCC,AA} & p_{CCC,A} & \cdots & p_{CCC,CCC} & p_{CCC,Défaut} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_{Défaut,Défaut}
\end{pmatrix}$$

Notation et hypothèses IV

6. Par exemple, pour une année donnée, la matrice obtenue, exprimée en pourcentage, est

$\mathbf{M} =$

{{90.81000000, 8.3300000, 0.679995, 0.0598586, 0.1135940, 0,0064490, 0,00000000, 0.00000000},

{0.69999800, 90.6499000, 7.789990, 0.6399840, 0.0599593, 0.13986800, 0.01609740, 0.00409766},

{0.09000230, 2.2699900, 91.049900, 05.5200000, 0.7399980, 0.26000100, 0.00997376, 0.06002650},

{0.02000750, 0.3299920, 5.949990, 86.9301000, 5.3000000, 1.17000000, 0.11999700, 0.18000300},

{0.03006200, 0.1399380, 0.670000, 7.7300000, 80.5300000, 8.84000000, 0.99999900, 1.06000000},

{0.00360773, 0.1064760, 0.239923, 0.4299950, 6.4800000, 83.46010000, 4.07000000, 5.20001000},

{0.20775800, 0.0119521, 0.220270, 1.3000200, 2.3799800, 11.24000000, 64.85990000, 19.79010000},

{0.00000000, 0.0000000, 0.000000, 0.0000000, 0.0000000, 0.00000000, 0.00000000, 1.00000000}}

Notation et hypothèses V

- Il est possible d'obtenir des estimés de la matrice de transition historique dans les rapports spéciaux de Moody's ou encore sur le site internet de Standard & Poors.

Exercice

Questions de base

Example

Exercice 1. Définissez la chaîne de Markov utilisée pour modéliser la variation de la cote de crédit d'une firme donnée au cours du temps et spécifiez l'espace des états possibles.

Réponse I

Questions de base

1. Soit X_n la cote de crédit de la firme à la fin de la n ième période de temps.
2. Nous n'avons pas encore spécifié quelle sera l'unité de temps choisie mais l'instant $t = 0$ signifie le moment ou débute l'étude.
3. Le processus stochastique $\{X_n : n \in \{0, 1, 2, ...\}\}$ représente donc la suite des cotes de crédit de la firme au cours du temps.
4. L'espace des états possibles est

$$\mathcal{E}_x = \left\{ \begin{array}{c} x_1 = AAA,\ x_2 = AA,\ x_3 = A,\ x_4 = BBB, \\ x_5 = BB,\ x_6 = B,\ x_7 = CCC,\ x_8 = Défaut \end{array} \right\}$$

Exercice

Questions de base

Example

Exercice 2. Définissez la distribution (fonction de masse) initiale du processus Markovien modélisant les variations de cotes de crédit d'une compagnie actuellement côtée BBB.

Réponse I

Questions de base

1. La distribution de X_0 est donnée par le vecteur

$$\overrightarrow{p}(0) = \left\{ \underset{AAA}{0}, \underset{AA}{0}, \underset{A}{0}, \underset{BBB}{1}, \underset{BB}{0}, \underset{B}{0}, \underset{CCC}{0}, \underset{Défaut}{0} \right\}^{\top}$$

puisque $P(X_0 = AAA) = 0$, $P(X_0 = AA) = 0$, $P(X_0 = A) = 0$, $P(X_0 = BBB) = 1$, $P(X_0 = BB) = 0$, $P(X_0 = B) = 0$, $P(X_0 = CCC) = 0$, $P(X_0 = Défaut) = 0$.

2. La distribution initiale $\overrightarrow{p}(0)$, étant donné que la compagnie démarre dans l'état où la cote est BBB, est le vecteur élémentaire avec le 1 en position 4, soit la position qui correspond à cette cote BBB.

Example

Exercice 3. Définissez la matrice de transition de la chaîne de Markov définie antérieurement et qui sera associée à tous les problèmes de migration des cotes de crédit.

Réponse I

Questions de base

1. Le principal est de savoir ce que devra être une matrice carrée de dimension $[8 \times 8]$. Cette matrice devra contenir les probabilités de passer à l'une des huit cotes possibles étant donné l'une des huit possibilités de cotes actuelles.

Réponse II

Questions de base

2. Concernant les probabilités numériques, nous utiliserons la matrice $\mathbf{M}_{[8\times 8]}$ similaire à celle contenue dans un article sur le 'CreditMetrics' publié par Standard&Poor's :

$\mathbf{M} =$

{{90.81000000, 8.3300000, 0.679995, 0.0598586, 0.1135940, 0,0064490, 0,00000000, 0.00000000},

{0.69999800, 90.6499000, 7.789990, 0.6399840, 0.0599593, 0.13986800, 0.01609740, 0.00409766},

{0.09000230, 2.2699900, 91.049900, 05.5200000, 0.7399980, 0.26000100, 0.00997376, 0.06002650},

{0.02000750, 0.3299920, 5.949990, 86.9301000, 5.3000000, 1.17000000, 0.11999700, 0.18000300},

{0.03006200, 0.1399380, 0.670000, 7.7300000, 80.5300000, 8.84000000, 0.99999900, 1.06000000},

{0.00360773, 0.1064760, 0.239923, 0.4299950, 6.4800000, 83.46010000, 4.07000000, 5.20001000},

{0.20775800, 0.0119521, 0.220270, 1.3000200, 2.3799800, 11.24000000, 64.85990000, 19.79010000},

{0.00000000, 0.0000000, 0.000000, 0.0000000, 0.0000000, 0.00000000, 0.00000000, 1.00000000}}

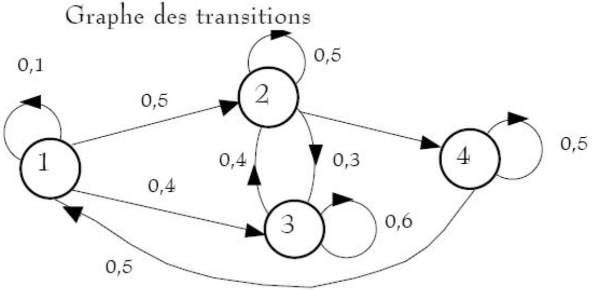
Matrice et graphe des transitions

La matrice de transition d'une CM à temps discret est la matrice P composée des p_{ij}, probabilités de transition.

- Cette matrice est carrée, de dimension le nombre d'états possibles.
- Tous les termes sont positifs ou nuls et inférieurs ou égaux à 1 (puisqu'elle ne contient que des probabilités).
- La somme des termes de chaque ligne est 1 (puisqu'il y a toujours 1 état de destination).
- Le graphe des transitions est formé de points représentant les états du processus et d'arcs correspondant aux transitions possibles, cad pour lesquelles les probabilités p_{ij} sont non nulles.

La matrice de transition pour le cas de Froggy :

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.5 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0 & 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

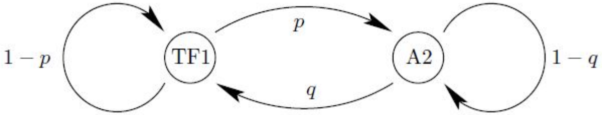


Matrice et graphe des transitions

Dans des temps très reculés, il n'y avait en France que deux chaines de télévision. Admettons qu'un téléspectateur choisisse entre ces chaines de la manière suivante:

- il commence par regarder la première chaine,
- au bout de 10 minutes, il change de chaine avec probabilité p;
- 10 minutes plus tard, il change de chaine avec probabilité p s'il regarde la première chaine, et avec probabilité q s'il regarde la seconde chaine;
- le processus se répête indéfiniment.

On peut associer le graphe suivant au processus:



Matrice et graphe des transitions

Soit X_n la chaine regardée pendant le $(n+1)$-ième intervalle de temps. On peut calculer la loi des X_n par récurrence.
Si $(x_n, y_n) = (P(X_n = 1), P(X_n = 2))$, on peut décrire sous forme matricielle :

$(x_0, y_0) = (1, 0)$

$(x_1, y_1) = (1, 0) \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix} = (1-p, p)$

$(x_2, y_2) = (1-p, p) \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix} = ((1-p)^2 + pq, p(2-p-q))$

et ainsi de suite. Après n itérations, on aura donc

$$(x_n, y_n) = (x_0, y_0).P^n$$

avec $P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$

Fiabilité de deux éléments en parallèle

Une unité de production comprend deux machines automatiques fonctionnant indépendamment l'une de l'autre. Chaque machine a une fiabilité p au cours d'une journée, ce qui signifie que sa probabilité de tomber en panne pendant cette période est égale à $1-p$. Dans ce cas, elle sera réparée pendant la nuit et se retrouvera en état de marche le lendemain. Une seule machine peut être réparée à la fois. On note X_n le nombre de machines en panne au début de la n^{ieme} journée, $n = 1, 2, \ldots$

- Calculer les probabilités conditionnelles $P(X_{n+1} = 0|X_n = 0)$, $P(X_{n+1} = 1|X_n = 0)$, $P(X_{n+1} = 0|X_n = 1)$ et $P(X_{n+1} = 1|X_n = 1)$

Fiabilité de deux éléments en parallèle

X_n ne peut prendre que les valeurs 0 et 1. En effet il ne peut y avoir plus d'une machine en panne au début d'une journée.
On a :

- $P(X_{n+1} = 0 | X_n = 0) = p^2 + p(1-p) + (1-p)p = p(2-p)$ (soit ni l'une ni l'autre ne tombe en panne, soit l'une tombe en panne et est réparée, soit l'autre tombe en panne et est réparée !

Fiabilité de deux éléments en parallèle

X_n ne peut prendre que les valeurs 0 et 1. En effet il ne peut y avoir plus d'une machine en panne au début d'une journée.
On a :

- $P(X_{n+1} = 0|X_n = 0) = p^2 + p(1-p) + (1-p)p = p(2-p)$ (soit ni l'une ni l'autre ne tombe en panne, soit l'une tombe en panne et est réparée, soit l'autre tombe en panne et est réparée !
- $P(X_{n+1} = 0|X_n = 1) = p$ (il y en a forcément une qui ne tombe pas en panne !)

Fiabilité de deux éléments en parallèle

X_n ne peut prendre que les valeurs 0 et 1. En effet il ne peut y avoir plus d'une machine en panne au début d'une journée.
On a :

- $P(X_{n+1} = 0|X_n = 0) = p^2 + p(1-p) + (1-p)p = p(2-p)$ (soit ni l'une ni l'autre ne tombe en panne, soit l'une tombe en panne et est réparée, soit l'autre tombe en panne et est réparée !
- $P(X_{n+1} = 0|X_n = 1) = p$ (il y en a forcément une qui ne tombe pas en panne !)
- $P(X_{n+1} = 1|X_n = 0) = (1-p)(1-p) = (1-p)^2$ (les deux tombent forcément en panne !)

Fiabilité de deux éléments en parallèle

X_n ne peut prendre que les valeurs 0 et 1. En effet il ne peut y avoir plus d'une machine en panne au début d'une journée.
On a :

- $P(X_{n+1} = 0 | X_n = 0) = p^2 + p(1-p) + (1-p)p = p(2-p)$ (soit ni l'une ni l'autre ne tombe en panne, soit l'une tombe en panne et est réparée, soit l'autre tombe en panne et est réparée !
- $P(X_{n+1} = 0 | X_n = 1) = p$ (il y en a forcément une qui ne tombe pas en panne !)
- $P(X_{n+1} = 1 | X_n = 0) = (1-p)(1-p) = (1-p)^2$ (les deux tombent forcément en panne !)
- $P(X_{n+1} = 1 | X_n = 1) = 1 - p$ (il y en a forcément une qui tombe en panne !)

Fiabilité de deux éléments en parallèle

La matrice de transition suivante est obtenue :

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} p(2-p) & (1-p)^2 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

Fiabilité de deux éléments en parallèle (bis)

Dans l'exemple des deux machines, si on ne répare plus une machine tombée en panne que le lendemain, déterminer la nouvelle matrice de transition obtenue

- on se trouve en présence d'une chaîne de Markov à trois états 0 , 1 et 2

Fiabilité de deux éléments en parallèle (bis)

Dans l'exemple des deux machines, si on ne répare plus une machine tombée en panne que le lendemain, déterminer la nouvelle matrice de transition obtenue

- on se trouve en présence d'une chaîne de Markov à trois états 0 , 1 et 2
- $P(X_{n+1} = 0 | X_n = 0) = p^2$

Fiabilité de deux éléments en parallèle (bis)

Dans l'exemple des deux machines, si on ne répare plus une machine tombée en panne que le lendemain, déterminer la nouvelle matrice de transition obtenue

- on se trouve en présence d'une chaîne de Markov à trois états 0 , 1 et 2
- $P(X_{n+1} = 0 | X_n = 0) = p^2$
- $P(X_{n+1} = 1 | X_n = 0) = 2p(1 - p)$

Fiabilité de deux éléments en parallèle (bis)

Dans l'exemple des deux machines, si on ne répare plus une machine tombée en panne que le lendemain, déterminer la nouvelle matrice de transition obtenue

- on se trouve en présence d'une chaîne de Markov à trois états 0 , 1 et 2
- $P(X_{n+1} = 0|X_n = 0) = p^2$
- $P(X_{n+1} = 1|X_n = 0) = 2p(1-p)$
- $P(X_{n+1} = 2|X_n = 0) = (1-p)^2$

Fiabilité de deux éléments en parallèle (bis)

Dans l'exemple des deux machines, si on ne répare plus une machine tombée en panne que le lendemain, déterminer la nouvelle matrice de transition obtenue

- on se trouve en présence d'une chaîne de Markov à trois états 0 , 1 et 2
- $P(X_{n+1} = 0|X_n = 0) = p^2$
- $P(X_{n+1} = 1|X_n = 0) = 2p(1-p)$
- $P(X_{n+1} = 2|X_n = 0) = (1-p)^2$
- $P(X_{n+1} = 0|X_n = 1) = p$

Fiabilité de deux éléments en parallèle (bis)

Dans l'exemple des deux machines, si on ne répare plus une machine tombée en panne que le lendemain, déterminer la nouvelle matrice de transition obtenue

- on se trouve en présence d'une chaîne de Markov à trois états 0 , 1 et 2
- $P(X_{n+1} = 0|X_n = 0) = p^2$
- $P(X_{n+1} = 1|X_n = 0) = 2p(1-p)$
- $P(X_{n+1} = 2|X_n = 0) = (1-p)^2$
- $P(X_{n+1} = 0|X_n = 1) = p$
- $P(X_{n+1} = 1|X_n = 1) = 1-p$

Fiabilité de deux éléments en parallèle (bis)

Dans l'exemple des deux machines, si on ne répare plus une machine tombée en panne que le lendemain, déterminer la nouvelle matrice de transition obtenue

- on se trouve en présence d'une chaîne de Markov à trois états 0 , 1 et 2
- $P(X_{n+1} = 0|X_n = 0) = p^2$
- $P(X_{n+1} = 1|X_n = 0) = 2p(1-p)$
- $P(X_{n+1} = 2|X_n = 0) = (1-p)^2$
- $P(X_{n+1} = 0|X_n = 1) = p$
- $P(X_{n+1} = 1|X_n = 1) = 1-p$
- $P(X_{n+1} = 2|X_n = 1) = 0$

Fiabilité de deux éléments en parallèle (bis)

Dans l'exemple des deux machines, si on ne répare plus une machine tombée en panne que le lendemain, déterminer la nouvelle matrice de transition obtenue

- on se trouve en présence d'une chaîne de Markov à trois états 0 , 1 et 2
- $P(X_{n+1} = 0 | X_n = 0) = p^2$
- $P(X_{n+1} = 1 | X_n = 0) = 2p(1-p)$
- $P(X_{n+1} = 2 | X_n = 0) = (1-p)^2$
- $P(X_{n+1} = 0 | X_n = 1) = p$
- $P(X_{n+1} = 1 | X_n = 1) = 1-p$
- $P(X_{n+1} = 2 | X_n = 1) = 0$
- $P(X_{n+1} = 0 | X_n = 2) = 0$

Fiabilité de deux éléments en parallèle (bis)

Dans l'exemple des deux machines, si on ne répare plus une machine tombée en panne que le lendemain, déterminer la nouvelle matrice de transition obtenue

- on se trouve en présence d'une chaîne de Markov à trois états 0 , 1 et 2
- $P(X_{n+1} = 0|X_n = 0) = p^2$
- $P(X_{n+1} = 1|X_n = 0) = 2p(1-p)$
- $P(X_{n+1} = 2|X_n = 0) = (1-p)^2$
- $P(X_{n+1} = 0|X_n = 1) = p$
- $P(X_{n+1} = 1|X_n = 1) = 1-p$
- $P(X_{n+1} = 2|X_n = 1) = 0$
- $P(X_{n+1} = 0|X_n = 2) = 0$
- $P(X_{n+1} = 1|X_n = 2) = 1$

Fiabilité de deux éléments en parallèle (bis)

Dans l'exemple des deux machines, si on ne répare plus une machine tombée en panne que le lendemain, déterminer la nouvelle matrice de transition obtenue

- on se trouve en présence d'une chaîne de Markov à trois états 0 , 1 et 2
- $P(X_{n+1} = 0|X_n = 0) = p^2$
- $P(X_{n+1} = 1|X_n = 0) = 2p(1-p)$
- $P(X_{n+1} = 2|X_n = 0) = (1-p)^2$
- $P(X_{n+1} = 0|X_n = 1) = p$
- $P(X_{n+1} = 1|X_n = 1) = 1-p$
- $P(X_{n+1} = 2|X_n = 1) = 0$
- $P(X_{n+1} = 0|X_n = 2) = 0$
- $P(X_{n+1} = 1|X_n = 2) = 1$
- $P(X_{n+1} = 2|X_n = 2) = 0$

Fiabilité de deux éléments en parallèle

Dans l'exemple des deux machines, si on ne répare plus une machine tombée en panne que le lendemain, déterminer la nouvelle matrice de transition obtenue

La matrice de transition suivante est obtenue :

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} p^2 & 2p(1-p) & (1-p)^2 \\ p & 1-p & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Loi de probabilité de X_n

Soit $\pi_k(n) = P(X_n = k)$, pour $n \geq 0$ et $k \in S$.
C'est la probabilité que le processus soit dans l'état k à l'instant n.
On peut définir ainsi un vecteur ligne :

$$\pi(n) = [\pi_1(n), \pi_2(n), \ldots]$$

dont la somme des termes vaut 1.
On a la relation suivante :

$$\pi(n+1) = \pi(n).P$$

où P est la matrice de transition.
On peut en déduire :

$$\pi(n) = \pi(0).P^n$$

Si l'on connait la distribution initiale des différents états (c'est-à-dire la proportion d'individus de la population étudiée se trouvant dans chacun des états x_i, que l'on appelle la loi de probabilité initiale π_0 ou $\pi(0)$), l'étude de la chaine de Markov va permettre de calculer, à partir de cette répartition

S	x_1	x_2	...	x_n
π_0	$\pi_0(x_1)$	$\pi_0(x_2)$	...	$\pi_0(x_n)$

$\pi_0(x_i)$ à l'instant $t = 0$, c'est-à-dire à partir des nombres $\pi_0(x_i) = P(X_0 = x_i)$, quels états la population va atteindre à l'instant $t = 1$ et avec quelles probabilités π_1, puis à l'instant $t = 2$ et ainsi de suite. En d'autres termes, on va ainsi calculer la loi π_t pour tous les $t > 0$ et ainsi modéliser la dynamique de cette population.

Un exemple en écologie

On s'interesse au développement d'une forêt naturelle en région tempérée sur une parcelle en friche (par exemple par abandon d'une zône cultivée ou suite à un incendie). Notre modèle simplifié comporte 3 états.

- L'état 1 est celui d'une végétation constituée d'herbes
- L'état 2 correspond à la présence d'arbustes dont le développement rapide nécessite un ensoleillement maximal
- L'état 3 est celui d'arbres plus gros qui peuvent se développer dans un environnement semi ensoleillé.

On note h, a, f ces trois états (pour herbe, arbustes,forêt), on a donc ici $S = \{h, a, f\}$.
Sur la parcelle on repère au sol un grand nombre de points (un millier) répartis sur un maillage régulier et on enregistre à intervalle de temps fixé (tous les 3 ans) l'état de la végétation en chacun de

L'observation de l'ensemble de ces points à l'instant initial t_0 permet de déterminer les proportions initiales de chacun des 3 états $\pi_0 = (\pi_0(h), \pi_0(a), \pi_0(f))$. Pour cela, on relève pour chacun d'eux l'état dans lequel il se trouve et on calcule la proportion de points dans chacun des états possible. On peut voir ces proportions comme les probabilités pour un point quelconque de la parcelle d'être dans l'un de ces états à l'instant initial.
Dans ce modèle, on suppose connues les 9 probabilités

$$p_{ij} = P(X_1 = j / X_0 = i)$$

pour chaque valeur $i \in \{h, a, f\}$ et $j \in \{h, a, f\}$, probabilités pour un point quelconque de passer de l'état i à l'état j.

On a (par exemple) :

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \\ h \\ a \\ f \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} h & a & f \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.5 & 0.45 & 0.05 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} \end{array}$$

On peut ainsi calculer la probabilité de n'importe quelle succession d'états, appelée trajectoire de la chaine de Markov. Par exemple la probabilité qu'en un point de la parcelle on observe la succession d'états (h, h, a, f, f) est égale à :
$P(X_0 = h, X_1 = h, X_2 = a, X_3 = f, X_4 = f)$
$= \pi_0(h)P(X_1 = h/X_0 = h)P(X_2 = a/X_1 = h)P(X_3 = f/X_2 = a)P(X_4 = f/X_3 = f)$
$= \pi_0(h)p_{hh}p_{ha}p_{af}p_{ff}$
$= \pi_0(h)(0,5)(0,45)(0,4)(0,9) = 0,081\pi_0(h).$

- Probabilité d'un parcours donné : si la particule est en i à un certain instant, la probabilité qu'elle suive le chemin $i \to k \to l \to m$ aux instants suivants est égale à $p_{ik}p_{kl}p_{lm}$.
- Probabilité d'atteinte d'un "'lieu"' donné : la probabilité que partant de i la particule atteigne un lieu donné $A \subset E$ est égale à la somme des probabilités de tous les chemins reliant i à un élément de A.

Mais on ne cherche pas seulement à calculer la probabilité particulière de chaque trajectoire de notre chaine de Markov, on voudrait plus généralement déterminer l'évolution des proportions des trois états entre le premier et le deuxième instant, entre le deuxième et le troisième, et plus généralement savoir comment vont évoluer ces proportions à l'avenir. Voici comment on procède. Pour calculer les probabilités π_1 des trois états à l'instant $t = 1$, c'est-à-dire pour calculer :

$$\pi_1 = (P(X_1 = h), P(X_1 = a), P(X_1 = f)) = (\pi_1(h), \pi_1(a), \pi_1(f)),$$

avec :

$$\pi_1(h) = P(X_1 = h/X_0 = h).P(X_0 = h) + P(X_1 = h/X_0 = a).P(X_0 = a) + P(X_1 = h/X_0 = f).P(X_0 = f)$$

$$\pi_1(h) = P(X_1 = h/X_0 = h).P(X_0 = h) + P(X_1 = h/X_0 = a).P(X_0 = a) + P(X_1 = h/X_0 = f).P(X_0 = f)$$

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} h & a & f \end{array} \\ \begin{array}{c} h \\ a \\ f \end{array} & \begin{pmatrix} 0.5 & 0.45 & 0.05 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\pi_1(h) = 0,5.\pi_0(h) + 0,1.\pi_0(a) + 0.\pi_0(f)$$

On remarque que $\pi_1(h)$ est le produit scalaire du vecteur π_0 avec la première colonne de la matrice $\mathbb{P}$. De même, on vérifie que $\pi_1(a)$ est le produit scalaire du vecteur π_0 avec la deuxième colonne de la matrice $\mathbb{P}$ et que $\pi_1(f)$ est le produit scalaire du vecteur π_0 avec la troixi'eme colonne de la matrice $\mathbb{P}$.

En résumé

le vecteur π_1 est le produit du vecteur π_0 par la matrice $\mathbb{P}$, ce qui s'écrit simplement :

$$\pi_1 = \pi_0.\mathbb{P}$$

$$(\pi_1(h), \pi_1(a), \pi_1(f)) =$$

$$(\pi_0(h), \pi_0(a), \pi_0(f)). \begin{pmatrix} 0.5 & 0.45 & 0.05 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$$

Probabilités de transition à n étapes

Soit $p_{ij}(n)$ la probabilité qu'une chaîne de Markov passe de l'état i à l'état j en n transitions ou étapes :
$p_{ij}(n) = p(X_n = j|X_0 = i) = p(X_{n+k} = j|X_k = i), (n \geq 1, k \geq 1)$
avec

$$p_{ij}^{(1)} = p_{ij}.$$

On note $P^{(n)}$ la matrice des probabilités de transition à n étapes :

$$P^{(n)} = ((p_{ij}^{(n)}))$$

Alors pour tout $n \geq 1$:

$$P^{(n)} = P^n$$

Probabilités de transition à n étapes

Alors pour tout $n \geq 1$:

$$P^{(n)} = P^n$$

En effet :

$p_{ij}^{(n)} = p(X_n = j|X_0 = i) = \sum_{k \in S} p(X_n = j, X_{n-1} = k|X_0 = i) (n \geq 2)$
$= \sum_{k \in S} p(X_n = j|X_{n-1} = k, X_0 = i) p(X_{n-1} = k|X_0 = i)$
$= \sum_{k \in S} p(X_n = j|X_{n-1} = k) p(X_{n-1} = k|X_0 = i)$
$= \sum_{k \in S} p_{kj}^{(1)} . p_{ik}^{(n-1)}$
Ce qui signifie que $P^{(n)} = P^{(n-1)} P$ et par itération on obtient $P^{(n)} = P^n$.
Plus généralement on a donc $P^{(m)} . P^{(n)} = P^{(m+n)}$

Probabilités de transition à n étapes

On obtient ainsi les équations de **Chapman- Kolgoromov** :

$$\sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)} = p_{ij}^{(m+n)}$$

Ces équations fournissent une condition nécessaire mais non pas suffisante pour qu'une suite de variables aléatoires (X_n) soit une chaîne de Markov.

Cela signifie que les éléments de la matrice de P^2 donnent les probabilités de passer d'un état à l'autre en deux pas, celles de P^s donnent les probabilités de passer d'un état à l'autre en s pas.

Etat atteignable

L'état j est dit atteignable depuis i s'il existe un $k > 1$ tel que l'élément de matrice ij de P^k soit strictement positif.

Loi de probabilité X_n

Soit $\pi_k(n) = P(X_n = k)$, pour $n \geq 0$ et $k \in S$. C'est la probabilité que le processus soit dans l'état k à l'instant n.
On peut définir ainsi un vecteur ligne $\pi(n) = [\pi_1(n), \pi_2(n), \ldots]$ dont la somme des termes vaut 1.
On a la relation suivante :

$$\pi(n+1) = \pi(n).\mathbb{P}$$

où $\mathbb{P}$ est la matrice de transition.
On peut en déduire :

$$\pi(n) = \pi(0).\mathbb{P}^n$$

Comportement asymptotique

On peut calculer $\pi(n)$, les probabilités d'état en fonction de n. Ces dernières dépendent de $\pi(0)$.
En fait, nous avons étudié le régime transitoire du processus.
On constate souvent que la distribution $\pi(n)$ converge vers une distribution limite quand $n \to \infty$.
Quand c'est la cas, cette dernière défini le régime permanent du processus. Ce régime permanent n'est pas influencé par le choix de la distribution initiale. On admet que le régime permanent est atteint au bout d'un nombre fini de transitions.

Comportement asymptotique

Exemple

Si :

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \pi(0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

alors

$$\lim_{n \to +\infty} \pi(n) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

En revanche pour toute autre distribution initiale, $\pi(n)$ ne converge pas.

La chaîne de Markov ainsi définie n'est donc pas convergente.

Comportement asymptotique

Théorème

Si la matrice de transition P est telle qu'au moins une de ses puissances n'a que des termes strictement positifs, alors, quelle que soit la distribution initiale $\pi(0)$, quand n tend vers l'infini :

$$\pi(n) \to \pi$$

$$P^n \to P^\star$$

π est un vecteur de probabilité strictement positif et $P^\star$, une matrice dont toutes les lignes sont identiques au vecteur limite π.

Théorème

Si la valeur propre 1 de P est simple et si toute autre valeur propre de P est de module strictement inférieur à 1, alors les conclusions du théorème précédent sont les mêmes.

Une distribution de probabilité discrète p est appelée stationnaire par rapport à une matrice stochastique P si :

$$\pi.P = \pi$$

Comportement asymptotique

Exemple

Soit une chaine de Markov de matrice $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
le symbole $+$ indiquant une valeur strictement positive, on trouve :

$\mathbb{P}^2 = \begin{pmatrix} + & + & + \\ + & + & 0 \\ + & 0 & + \end{pmatrix}, \mathbb{P}^3 = \begin{pmatrix} + & + & + \\ + & + & + \\ + & + & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{P}^4 =$
$\begin{pmatrix} + & + & + \\ + & + & + \\ + & + & + \end{pmatrix}$ Chaîne de Markov convergente !

Pour trouver les composantes du vecteur de distribution stationnaire, il existe 2 méthodes :

1. résoudre le système :
    - $\pi.P = \pi$,
    - $\sum_{k \in S} \pi_k = 1$,
2. en résolvant les équations de balance : on interprète les probabilité π_k comme des masses associées aux états k et le produits $\pi_k p_{kj}$ comme des flux de masse entre les deux états k et j. La répartition des masses π_k est stationnaire si, lors d'une transition, le flux d'entrée et égal au flux de sortie pour chacun des états

Théorème

Si π est la distribution limite d'une chaîne de Markov, alors π est l'unique distribution stationnaire de cette chaîne.

Exercice I

Soit la matrice de transition suivante : $\begin{array}{c} \\ h \\ a \\ f \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} h & a & f \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.5 & 0.45 & 0.05 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} \end{array}$

1. Calculer la probabilité des trajectoires suivantes (h, a, f, h), (h, a, f, a), (a, a, a).
2. Calculer la distribution des états π_1 à l'instant $t = 1$ si l'on suppose $\pi_0 = (1, 0, 0)$. Interpréter.
3. Montrer qu'une distribution uniforme $\pi_0 = (1/3, 1/3, 1/3)$ n'est pas une distribution stationnaire pour cette chaine de Markov. Interprétez ce résultat.
4. Y-a-t-il une distribution stationnaire pour cette chaine de Markov ?

Correction Exercice I

1.
   - $P(h, a, f, h) = \pi_0(h).0,45.0,4.0 = 0,$
   - $P(h, a, f, a) = \pi_0(h).0,45.0,4.0,1 = 0,018.\pi_0(h),$
   - et $P(a, a, a) = \pi(a).0,5.0,5 = 0,25.\pi_0(a)$

2. $\pi_1 = \pi_0.\mathbb{P} = (1, 0, 0).\begin{pmatrix} 0.5 & 0.45 & 0.05 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} =$ $(0.5, 0.45, 0.05)$ La moitié de la parcelle sera recouverte d'herbe, 45% d'arbustes et 5% de foret, si l'on suppose qu'au debut il n'y avait que de l'herbe.

3. $\pi_0.\mathbb{P} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}). \begin{pmatrix} 0.5 & 0.45 & 0.05 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} = (0.2, 0.35, 0.45) \neq \pi_0$

   Donc la distribution uniforme (même proportion de chacun des trois type) n'est pas stationnaire, ce qui signifie que s'il y a au depart le même pourcentage de chacun des trois types, la distribution est modifiée !

4. On doit résoudre l'équation $\pi.P = \pi$, avec $\pi = (p, q, r)$.

$$(S) \begin{cases} 0.5p & +0.1q & = p \\ 0.45p & +0.5q + 0.1r & = q \\ 0.05p & +0.4q + 0.9r & = r \\ p+ & q + r & = 1 \end{cases}$$

   On trouve la solution $\pi^\star = (\frac{2}{53}, \frac{10}{53}, \frac{41}{53})$

Chaînes de Markov absorbantes

Un état k d'une chaîne est dit absorbant si le processus ne peut plus quitter cet état une fois qu'il y est entré, i.e., $p_{kk} = 1$.

Une chaîne de Markov est dite absorbante s'il existe au moins un état absorbant et s'il on peut passer de n'importe quel état à un état absorbant.

Lorsqu'on a affaire à une chaîne de Markov absorbante, on est généralement intéressé par les deux questions suivantes :

1. Combien de temps faudra-t-il pour que le processus soit absorbé, étant donné son état initial ? On appellera n_i le temps moyen jusqu'à l'absorption en partant de i.
2. S'il existe plusieurs états absorbants, quelle est la probabilité pour un processus d'être absorbé par un état donné. On appellera b_{ij} la probabilité que le processus soit absorbé dans j si son état initial est i.

Théorème

Les quantités n_i sont solution du système d'équations :

$$n_i = 1 + \sum_{k \in S'} p_{ik} n_k$$

où i est un état non absorbant et S' l'ensemble de tous les états non absorbants.

Preuve du Théorème

Soit N_i le nombre d'étapes avant l'arrivée à un des états absorbants.
Soit i un état non absorbant, S' l'ensemble des états non absorbants et S_a l'ensemble des états absorbants.
On a l'espérance $E(N_i)$:

$$E(N_i) = \sum_{s=0}^{\infty} P(N_i = s+1).(s+1)$$

Preuve du Théorème

On a :

$$P(N_i = 1) = \sum_{j \in S_a} p_{ij}$$

(probabilité de passage à un état absorbant en un coup)
et

$$P(N_i = s+1) = \sum_{j \in S'} p_{ij}.P(N_j = s), s \geq 1$$

(si on passe à un état absorbant en plus d'une étape alors la première étape est $i \to j$ avec i, j non absorbants).

Preuve du Théorème

On peut écrire :

$$\sum_{s=1}^{\infty} P(N_i = s+1).(s+1) = \sum_{s=1}^{\infty}(\sum_{j \in S'} p_{ij}.P(N_j = s)).(s+1)$$

$$= \sum_{j \in S'} p_{ij}(\sum_{s=1}^{\infty} P(N_j = s).s + \sum_{s=1}^{\infty} P(N_j = s))$$

Preuve du Théorème

On a : $\sum_{s=1}^{\infty} P(N_j = s) = 1$ car l'état j est non absorbant et la probabilité que le système n'arrive jamais à un état absorbant est nulle ! Donc :

$$\sum_{s=1}^{\infty} P(N_i = s+1).(s+1) = \sum_{j \in S'} p_{ij}.E(N_j) + \sum_{j \in S'} p_{ij}$$

D'où :

$$E(N_i) = \underbrace{P(N_i = 1)}_{s=0} + \sum_{s=1}^{\infty} P(N_i = s+1).(s+1)$$

$\Leftrightarrow$

$$E(N_i) = \sum_{j \in S_a} p_{ij} + \sum_{j \in S'} p_{ij} + \sum_{j \in S'} p_{ij}.E(N_j)$$

Preuve du Théorème

On obtient en résumé :

$$E(N_i) = \sum_{j \in S_a} p_{ij} + \sum_{j \in S'} p_{ij} + \sum_{j \in S'} p_{ij}.E(N_j)$$

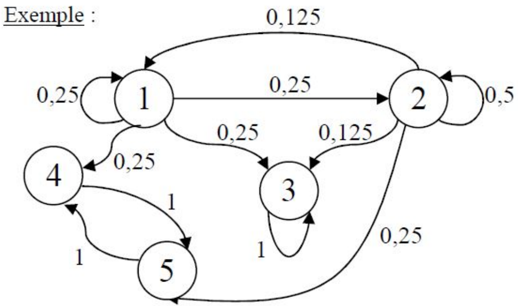
$\Leftrightarrow$

$$E(N_i) = 1 + \sum_{j \in S'} p_{ij}.E(N_j)$$

On pose alors $n_i = E(N_i)$ et BINGO !!!

Exemple

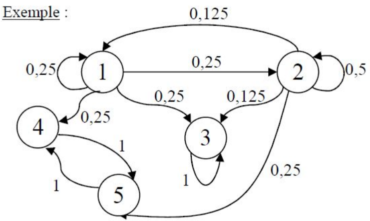
Soit le graphe suivant :



$$S_a = ?, S' = ?$$

Exemple

Soit le graphe suivant avec $S_a = \{\{3\}, \{4,5\}\}$ et $S' = \{1,2\}$:



Temps moyen d'absorption :

- $n_1 = 1 + p_{11}.n_1 + p_{12}.n_2 = 1 + 0.25n_1 + 0.25n_2$,
- $n_2 = 1 + p_{21}.n_1 + p_{22}.n_2 = 1 + 0.125n_1 + 0.5n_2$.

$$\Rightarrow n_1 = \frac{24}{11}, n_2 = \frac{28}{11}$$

Théorème

Soit j un état absorbant et S' l'ensemble de tous les états non absorbants. Alors les probabilités $b_{ij}(i \in S')$ sont solution du système d'équations :

$$b_{ij} = p_{ij} + \sum_{k \in S'} p_{ik} b_{kj}$$

Intuitivement : soit on passe de i à j en un coup ($i \longrightarrow j$), d'où p_{ij} ou bien, on passe par des états intermédiaires (k) qui sont forcément non absorbants ($\in S'$ - sinon on ne pourrait jamais les quitter pour aller en j !) : $i \longrightarrow k \longrightarrow j$.

Probabilité d'absorption

Soit A un ensemble d'états absorbants constituant une composante fortement connexe sans arc sortant :
Notation : $b_{i,A} = P(X(n) \in A$ pour un certain $n \in \mathbb{N} | X(0) = i)$

$b_{i,A} = p_{ij} + \sum_{k \in S'} P(X(n) \in A$ pour un certain $n \in \mathbb{N} | X_0 = i, X_1 = k).P(X_1 = k | X_0 = i)$

$b_{i,A} = p_{ij} + \sum_{k \in S'} P(X(n) \in A$ pour un certain $n \in \mathbb{N} | X_1 = k).p_{ik}$

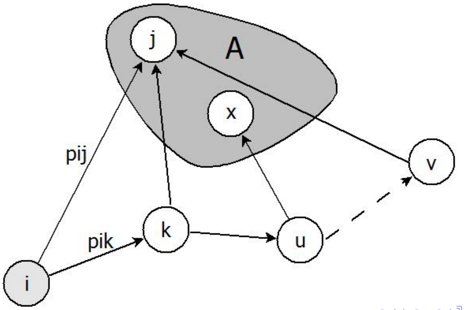
$$b_{i,A} = p_{ij} + \sum_{k \in S'} b_{k,A}.p_{ik}$$

Avec $j \in A$, i.e. j est un état absorbant (si $A = \{j\}$ on retrouve le résultat précédent).

Probabilité d'absorption

Soit A un ensemble d'états absorbants constituant une composante fortement connexe sans arc sortant :

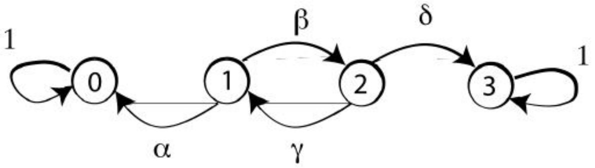
$$b_{i,A} = p_{ij} + \sum_{k \in S'} b_{k,A} . p_{ik}$$



Exemple

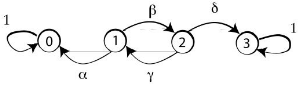
Soit le graphe suivant avec $S_a = \{\{0\}, \{3\}\}$ et $S' = \{1, 2\}$

Chaîne de Markov à quatre états dont deux sont absorbants



Exemple

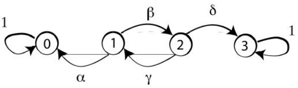
Chaîne de Markov à quatre états dont deux sont absorbants



Probabilité d'être absorbé par l'état 0 ?

Exemple

Chaîne de Markov à quatre états dont deux sont absorbants



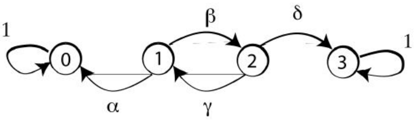
- $b_{00} = p_{00} = 1$ et $b_{30} = 0$,
- $b_{10} = p_{10} + p_{11} b_{10} + p_{12} b_{20} = \alpha + \beta . b_{20}$,
- $b_{20} = p_{20} + p_{21} b_{10} + p_{22} b_{20} = \gamma . b_{10}$.

Nous obtenons deux équations à deux inconnues :

1. $b_{10} = \frac{\alpha}{1 - \beta . \gamma}$,
2. $b_{20} = \frac{\gamma . \alpha}{1 - \beta . \gamma}$

Exemple

Chaîne de Markov à quatre états dont deux sont absorbants

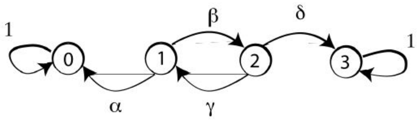


Probabilité d'être absorbé par l'état 3 ? Démontrer que:

1. $b_{13} = \frac{\beta.\delta}{1-\beta.\gamma}$,
2. $b_{23} = \frac{\delta}{1-\beta.\gamma}$

Exemple

Chaîne de Markov à quatre états dont deux sont absorbants



Probabilité d'être absorbé par l'état 3 ? Il suffit d'écrire :

- $b_{00} = p_{00} = 1$ et $b_{30} = 0$,
- $b_{13} = p_{13} + p_{11} b_{13} + p_{12} b_{23} = \beta . b_{23}$,
- $b_{23} = p_{23} + p_{21} b_{13} + p_{22} b_{23} = \delta + \gamma . b_{13}$.

- Un état $i \in \chi$ d'une chaine de Markov est dit absorbant si $p_{ii} = 1$ (et donc nécessairement $p_{ij} = 0$ pour $j \neq i$).
- Une chaine de Markov est absorbante s'il existe, pour tout état, un état absorbant atteignable depuis cet état.
- Une chaine non absorbante est dite *transiente*.

Il est commode de renuméroter les états d'une chaine absorbante, en plaçant d'abord les états non absorbants, ensuite les états absorbants. Dans ce cas, on dira que la matrice de transition est écrite sous forme canonique.

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

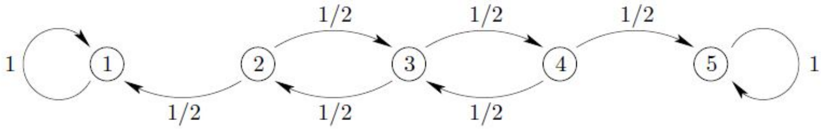
S'il y a r états absorbants, Q est une matrice de taille $(m-r) \times (m-r)$, R est une matrice de taille $(m-r) \times r$ et I est la matrice identité de taille r.

Exercice II

Un ivrogne titube le long d'une rue. A chacun des angles de la rue, numérotés $2, 3, 4$, il change de direction avec probabilité $\frac{1}{2}$. Aux extrémités de la rue se trouvent le bar (en 1) et sa maison (en 5). S'il arrive soit au bar, soit à la maison, il y passe le reste de la nuit. Partant d'un angle de rue donnée, avec quelle probabilité finit-il dans le bar ou dans son lit?

Correction Exercice II

Le graphe du processus est le suivant :



Sa matrice de transition est donnée par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans l'Exemple de l'ivrogne, les états 1 et 5 sont absorbants, les états 2, 3 et 4 ne le sont pas. La matrice s'écrira donc, sous forme canonique :

$$
\begin{array}{c}
 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \\ 1 \\ 5
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc|cc}
0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\
1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\
0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\end{array}
$$

Les matrices Q et R sont données par :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

S'il y a r états absorbants, Q est une matrice de taille $(m-r) \times (m-r)$, R est une matrice de taille $(m-r) \times r$ et I est la matrice identité de taille r.
on vérifie facilement par récurrence que :

$$\mathbb{P}^n = \begin{pmatrix} Q^n & \left[I + Q + \ldots + Q^{n-1}\right] R \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Proposition

Pour une chaine de Markov absorbante :

1. $$\lim_{n \to \infty} Q^n = 0$$
2. La matrice $I - Q$ est inversible, et son inverse vaut :
$$[I - Q]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} Q^k$$

Nous noterons N la matrice $[I - Q]^{-1}$, et nous l'appellerons la *matrice fondamentale* de la chaine.

Proposition

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} 0 & N.R \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Le fait que Q^n tend vers zéro traduit donc le fait que la probabilité d'absorption tend vers 1 lorsque le temps tend vers l'infini. La matrice $B = N.R$ devrait représenter les probabilités de transition, dans la limite des temps infinis, entre état non absorbants et absorbants.

On obtient donc les résultats suivants :

Propriétés

Soit N la matrice fondamentale d'une chaine de Markov absorbante.

1. Le nombre moyen de périodes séjournées dans l'état transitoire (non absorbant) j par une chaine de Markov débutant sont évolution dans l'état non absorbant i est égal à l'élément $(N)_{ij}$ de la matrice fondamentale N.
2. Le nombre moyen d'étapes avant absorption sachant que l'on part de l'état i est la somme des termes de la i^{eme} ligne de N. Autre formulation :
   - Partant de l'état transitoire i, le nombre moyen de transitions avant d'atteindre un état absorbant est égal à la somme des termes de la i^{eme} ligne de la matrice fondamentale N.

On obtient donc les résultats suivants :

Propriétés (suite)

Soit N la matrice fondamentale d'une chaine de Markov absorbante.

3. Dans une chaîne de Markov absorbante avec P mise sous forme canonique, le terme b_{ij} de la matrice $B = N.R$ est la probabilité d'absorption par l'état absorbant j sachant que l'on part de l'état i.

illustration

Mais y'a rien là monsieur !!!!

Les Réseaux de files d'attente

Les Réseaux de Files d'Attente (RFA) permettent de modéliser et d'analyser les systèmes de type clients/serveurs.

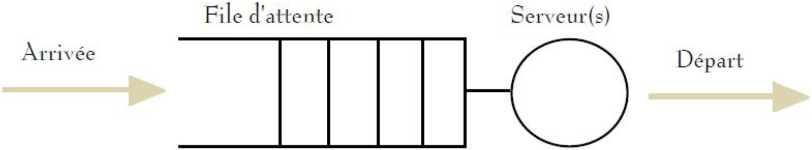
Un peu d'histoire : Ils ont été introduits pour l'étude des premiers systèmes téléphoniques, pour connaitre le taux d'occupation des lignes et des standards. Plus tard, ils ont servi en recherche opérationnelle et en fiabilité. Plus tard encore, en informatique, ils ont permis de prévoir le taux d'utilisation d'un serveur ou d'un réseau. En ce qui concerne les systèmes de production, il est clair que l'on peut aisément considérer les pièces comme des clients et les machines comme des serveurs. Les applications sont alors nombreuses :

- taux d'occupation machine,
- temps de séjour d'une pièce dans le système de production,
- nombre de pièces dans les stocks intermédiaires.

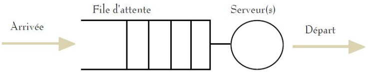
Les Réseaux de files d'attente

Présentation d'une station Une station est un système où les clients arrivent pour recevoir un service. Si le serveur ou les serveurs sont occupés, ils attendent leur tour.

Schema d'une station :



Les Réseaux de files d'attente



Définitions

La file d'attente : Elle peut être finie ou infinie. Dans ce dernier cas, elle peut modéliser un stock à capacité illimitée. Quand un client essaye d'entrer dans une station dont la file d'attente limitée est pleine, on considère que le client est perdu.

Les Réseaux de files d'attente

Définitions

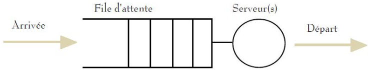
Le ou les serveurs : On parle d'un monoserveur lorsqu'il y a un serveur qui traite les clients les uns après les autres. C'est le cas des guichets par exemple. On parle de multiserveur quand plusieurs clients sont servis en même temps, parcequ'il y a plusieurs serveurs. C'est le cas d'un rayon fromage dans les supermarchés par exemple. La notion de serveur infini est plus abstraite. Il correspond au cas où tous les clients qui arrivent peuvent être servis immédiatement. Cela suppose que la file d'attente derrière un tel serveur n'est pas utile. C'est le cas des rayons boîtes de conserve dans les supermarchés par exemple. Certains convoyeurs peuvent également être considérés comme tels.

Les Réseaux de files d'attente

Définitions

- **Discipline de service** : Ordre dans lequel les clients dans la file seront retirés pour être servis. La discipline par défaut est PAPS (Premier Arrivé, Premier Servi) ou FIFO (First In, First Out). Si une autre discipline est utilisée (comme DAPS ou LIFO ou bien aléatoirement ou autre), il faut la préciser.
- **Processus d'arrivée** : décrit le temps entre deux arrivées successives de clients. Ce temps peut être déterministe (il faut donner sa valeur) ou bien aléatoire (il faut alors préciser la loi : loi de Poisson, d'Erlang ou autre et les paramètres qui permettent de la définir).

Les Réseaux de files d'attente



Définitions

- **Processus de service** : décrit le temps que met un serveur pour traîter un client. Mêmes remarques que ci-dessus.

Les Réseaux de files d'attente

Pour préciser en 2 lettres et 2 nombres les principaux paramètres de la file d'attente : **A/B/C/K**.

Notation de Kendall

- **A** et **B** : Processus d'arrivée et Processus de service
  - **M** : loi de Poisson (nous en verrons une définition au chapitre suivant) ou loi exponentielle
  - **D** : Déterministe
  - **G** : générale
- **C** : le nombre de serveurs
- **K** : La capacité de la file (omise si infinie)

Les Réseaux de files d'attente

Notation de Kendall : Exemples :

- Une caisse de supermarché dont l'arrivée de clients suit une loi de poisson et telle que le temps de service (temps de traitement d'un client) suive une loi exponentielle peut être considérée comme une station $M/M/1$
- Un salon de Coiffure dont l'arrivée des clients suit une loi de poisson et telle que le temps de service (temps de coiffage d'un client) suive une loi générale (à préciser) qui comprend 2 coiffeurs et 4 places assises pour attendre peut être considéré comme une station $M/G/2/4$
- Un convoyeur à vitesse constante et qui n'a qu'une entrée et une sortie et dont l'arrivée des clients suit une loi de poisson peut être considéré comme une station $M/D/\infty$

Les Réseaux de files d'attente

Etude d'une station

On peut vouloir étudier une station en isolation. Bien sûr, lorque les processus d'arrivée et de service sont déterministes, le comportement de la station est également déterministe et une étude est inutile.

Par contre, lorsque ces processus sont aléatoires, selon s'il y a un ou plusieurs serveurs, si la file est à capacité limitée ou non, il devient difficile d'intuiter le nombre moyen de clients en attente par exemple.

Les Réseaux de files d'attente

Performances souhaitées
L'étude d'une station doit permettre de connaître son comportement et plus particulièrement, certaines grandeurs qui semblent importantes. Certaines d'entre elles sont indépendantes des processus d'arrivée/de service, elles dépendent seulement de leur moyenne :

- débit des clients : X
- taux d'utilisation du serveur
- D'autres, dépendent des processus d'arrivée/de service :
  - nombre moyen de clients dans la station : Q (clients en attente + clients en train d'être servis)
  - temps de réponse du client (entre l'entrée et la sortie de la station) : W (temps d'attente + temps de service)

Les Réseaux de files d'attente

Performances souhaitées

loi de Little

Une loi relie certaines de ces grandeurs, la loi de Little :

$$Q = W.X$$

Les Réseaux de files d'attente

Performances souhaitées

Pour connaître ces grandeurs, il faut et il suffit de calculer :

$$P(n) = \text{probabilité d'avoir } n \text{ clients dans la station, } n \in \mathbb{N}.$$

Etudier une station c'est trouver $P(n)$, pour tout n.
Dans le cadre de méthodes analytiques, on trouvera $P(n)$ par calcul.
On peut aussi le trouver par simulation. Une fois qu'on a $P(n)$, pour tout n, on peut connaître :

$$Q = \sum_{n=0}^{\infty} n.P(n)$$

car Q est la moyenne du nombre de clients dans la station.

Les Réseaux de files d'attente

Performances souhaitées

Le débit des clients vaut, s'il n'y a qu'1 serveur :

$$X = \mu.(1 - P(0))$$

.

où μ est le débit du serveur lorsque celui-ci est occupé.
Si la file d'attente est illimitée et que l'on appelle λ le débit d'entrée des clients et si $\lambda < \mu$ alors $X = \lambda$ en régime permanent.
On peut alors connaître le temps de passage moyen du client dans la station :

$$W = Q/X$$

Etude de la $M/M/1$

Nous allons particulièrement étudier une station dont les processus d'arrivée des clients et de service sont repectivement un processus de poisson et une loi exponentielle. Ces processus dits markoviens sont particulièrement pratiques dans le cadre d'une étude analytique car le comportement de la station peut être décrit par un processus Markovien “de naissance et de mort”.

Etude de la $M/M/1$

On dit qu'un processus de comptage (d'événements arrivant aléatoirement) $\{N(t)\}$ est un processus de Poisson s'il satisfait aux trois conditions suivantes :

1. Le processus $N(t)$ est homogène dans le temps. Ceci veut dire que la probabilité d'avoir k événements dans un intervalle de longueur donnée t ne dépend que de t et non pas de la position de l'intervalle par rapport à l'axe temporel.
2. Le processus $N(t)$ est à accroissements indépendants ce qui signifie que pour tout système d'intervalles disjoints, les nombres d'événements s'y produisant sont des variables aléatoires indépendantes.
3. La probabilité que deux événements ou plus se produisent dans un petit intervalle dt est négligeable par rapport à la probabilité qu'il n'y ait qu'un seul événement.

Etude de la $M/M/1$

Théorème

Un processus de comptage est un processus de Poisson de paramètre λ si les intervalles de temps entre deux événements consécutifs sont des varaibles aléatoires indépendantes obéissant à la même loi exponentielle de paramètre λ.

Théorème

Le coefficient λ est égal au nombre moyen d'événements par unité de temps.

Etude de la $M/M/1$

Il y a donc un lien étroit entre processus de Poisson et loi exponentielle. C'est pourquoi ils sont représentés, dans la notation de Kendall par la même lettre : **M** comme Markovien. On parlera de processus de poisson pour une loi d'arrivée de clients parceque c'est un processus de comptage ou de renouvellement et on parlera de temps suivant une loi exponentielle pour les processus de service.

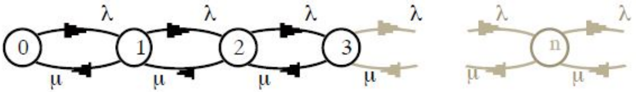
Etude de la $M/M/1$

Lorsque les processus d'arrivée et de service sont markoviens, on peut parler d'état de la station. Ces états sont : 0 client dans la station, 1 client, 2 clients, etc... On passe de l'état i à l'état $i+1$ si un client arrive c'est à dire en suivant une loi exponentielle de taux λ.

On passe de l'état i à l'état $i-1$ si un client est servi c'est à dire en suivant une loi exponentielle de taux μ (μ est le taux de service du serveur).

Pour qu'un tel système ne diverge pas (nombre de clients fini), il est indispensable que $\lambda < \mu$.

Voici une représentation shématique de ce processus :



Etude de la $M/M/1$

Il faut maintenant chercher $P(n)$, la probabilité d'avoir n clients dans la station. C'est aussi la probabilité d'être dans l'état n du processus markovien précédent. On peut écrire les équations d'évolution du processus :

équations d'évolution

$$\frac{\partial P(0)}{\partial t} = \mu.P(1) - \lambda.P(0)$$

$$\frac{\partial P(1)}{\partial t} = \lambda.P(0) + \mu.P(2) - (\lambda + \mu).P(1)$$

Etude de la $M/M/1$

En régime stationnaire la partie gauche des équations est nulle. Ce qui donne, pour tout n :

équations d'évolution

$$P(n) = (\frac{\lambda}{\mu})^n.P(0)$$

Etude de la $M/M/1$

Pour calculer $P(0)$, il suffit de rappeler que les $P(i)$ sont les probabilités d'être dans un état et que :

$$\sum_{i=0}^{\infty} P(i) = 1$$

D'où, dans le cas de la $M/M/1$: $P(0) = 1 - \rho$ avec $\rho = (\frac{\lambda}{\mu})$, $(\rho < 1)$.
Pour le débit, une autre façon de voir les choses est de remarquer que le service s'effectue avec un taux μ dans chaque état où le système contient au moins un client : $X =$Proba(file non vide).μ

Etude de la $M/M/1$

Les performances d'une telle station se calculent alors :

performances

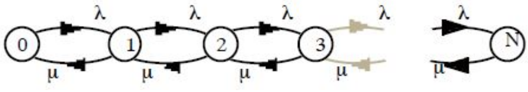
1. Débit : $X = (1 - P(0)).\mu = \rho.\mu = \lambda$
2. Nombre moyen de clients dans la station : $Q = \sum_{n=0}^{\infty} n.P(n) = (\frac{\rho}{1-\rho})$
3. Nombre moyen de clients en attente (nombre de clients dans la station - clients en train d'être servis) : $Q - \rho$
4. Temps de réponse moyen : $W = \frac{Q}{X} = \frac{1}{\mu-\lambda}$
5. Temps d'attente (temps de réponse - temps de service) : $W - \frac{1}{\mu}$

Ces résultats ne sont valables que pour une $M/M/1$.

Extensions de la $M/M/1$

la $M/M/1/N$

Cette fois la capacité de la station (serveur + attente)est limitée à N clients. Le processus de naissance et de mort équivalent se transforme en :



On a toujours :

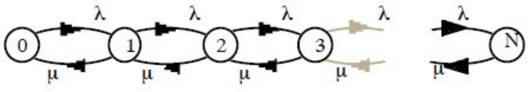
$$P(n) = (\frac{\lambda}{\mu})^n.P(0)$$

Cette fois pour calculer $P(0)$ on utilise :

$$\sum_{i=0}^{N} P(i) = 1$$

Extensions de la $M/M/1$

la $M/M/1/N$



D'où :

$$P(0) = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}$$

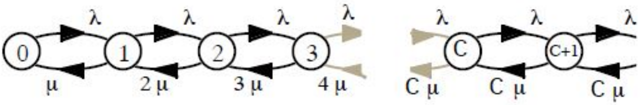
On peut alors calculer les performances souhaitées : Q, W, X.

La $M/M/C$

La capacité de la station n'est plus limitée mais il y a C serveurs en parallèle. Chacun de ces serveurs a un taux μ (chaque serveur met en moyenne un temps de $\frac{1}{\mu}$ pour servir un client).
La nouvelle condition de stabilité est :

$$\lambda < C.\mu$$

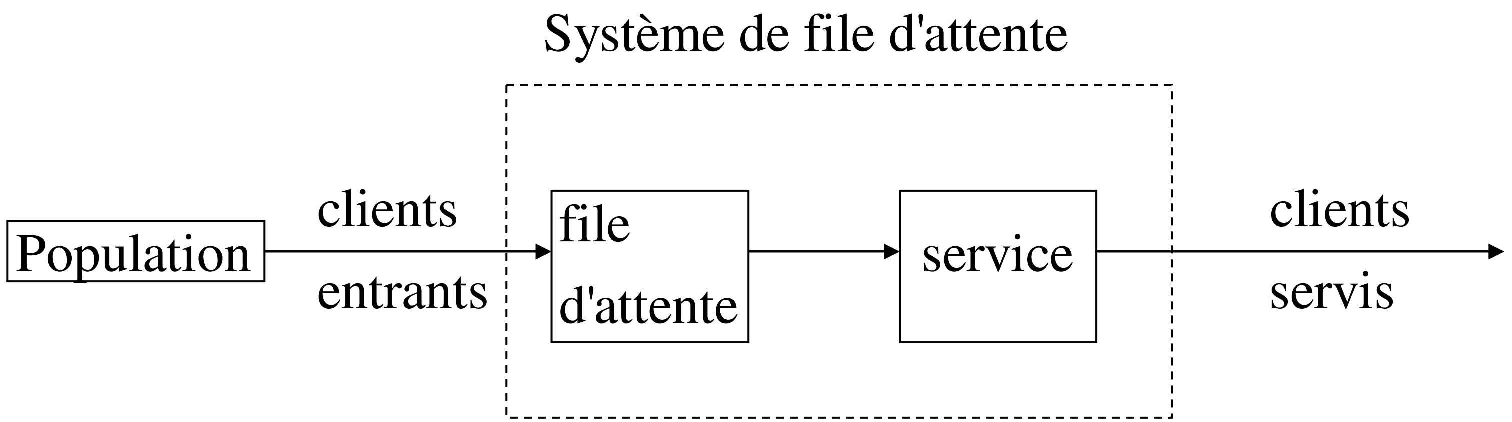
Cette station se comporte comme le processus de naissance et de mort suivant :



Modèles stochastiques

Modèle de file d'attente

1. Structure de base



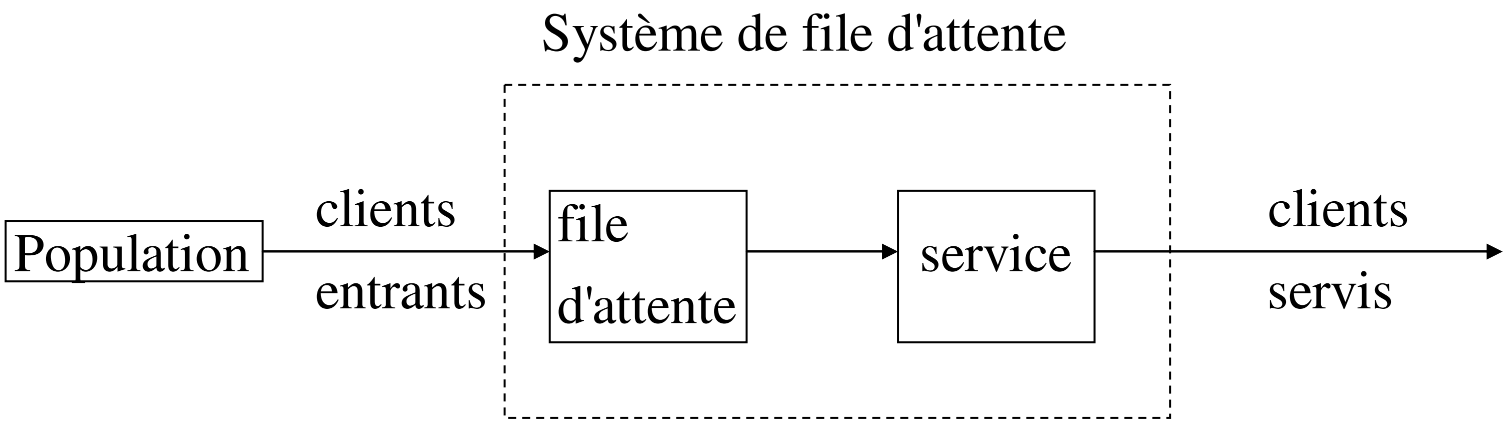
Population: La population constitue la source de clients potentiels. Elle est caractérisée par son nombre d'élément (fini ou infini).

Clients: Les clients (issus de la population) se joignent au système avec un taux moyen d'arrivée.

File d'attente: La file d'attente est caractérisée par le nombre maximum permis de clients en attente (fini ou infini)

Service: Le service peut être assuré par un ou plusieurs serveurs. Le temps qui s'écoule entre le début et la fin de service d'un client est dénoté le temps de service suivant une distribution de probabilité. Donc le taux de service est une autre caractéristique du système.

1. Structure de base



Stratégie de: service — La stratégie de service réfère à l'ordre selon laquelle les clients sont servis: premier arrivé premier servi, au hasard, selon des priorité, …

Hypothèses:

Le temps s'écoulant entre deux arrivées consécutives est distribué exponentiellement

Le temps de service est aussi distribué exponentiellement

Terminologie et notation:

$P_n(t) =$ Probabilité d'avoir n clients dans le système au temps t

s = Nombre de serveurs

λ_n = Taux moyen d'arrivée (espérance mathématique du nombre d'arrivées par unité de temps) de nouveaux clients dans le système lorsque n clients sont dans le système

Paramètre définissant la distribution exponentielle des arrivées lorsque n clients sont dans le système

$\frac{1}{\lambda_n}$ = Temps moyen entre les arrivées lorsque n clients sont dans le système

μ_n = Taux moyen de service d'un client lorsque n clients sont dans le système

Paramètre définissant la distribution exponentielle du service d'un client lorsque n clients sont dans le système

$\frac{1}{\mu_n}$ = Temps moyen de service d'un client lorsque n clients sont dans le système

Quand nous commençons à analyser un système de file d'attente, l'état de ce dernier dépend beaucoup de l'état initial et du temps écoulé. Nous disons alors que le système est en situation transitoire, et son étude est alors très complexe.

C'est pourquoi dans la théorie des files d'attente, nous préférons faire l'étude une fois que le système a atteint sa situation d'équilibre où les états du système sont essentiellement indépendantes de l'état initial et du temps déjà écoulé.
On suppose en quelque sorte que le système est en opération depuis un très long moment.

Notation et terminologie lorsque la situation d'équilibre tient:

$P_n =$ Probabilité qu'il y ait n clients dans le système

$L =$ Nombre moyen (espérance mathématique) de client dans le système

$L_q =$ Nombre moyen de client dans la file d'attente (excluant ceux dans le service)

$W =$ Temps moyen dans le système

$W_q =$ Temps moyen dans la file (excluant le temps de service)

Alors

$$L = \sum_n nP_n$$

$$L_q = \sum_{n \geq s} (n-s) P_n$$

De plus, définissons

$\bar{\lambda} = \sum_n \lambda_n P_n$ (taux moyen d'arrivée)

Par les formules de Little

$$L = \bar{\lambda} W$$

$$L_q = \bar{\lambda} W_q$$

Donc, essentiellement il faut d'abord déterminer les P_n pour compléter l'étude d'une file d'attente

2. Processus de naissance et de mort

Hypothèses:

Le temps s'écoulant entre deux arrivées consécutives est distribué exponentiellement

Le temps de service est aussi distribué exponentiellement

Sous les hypothèse précédentes, une file d'attente peut être vu comme un processus de naissance et de mort:

naissance $\leftrightarrow$ arrivée du client

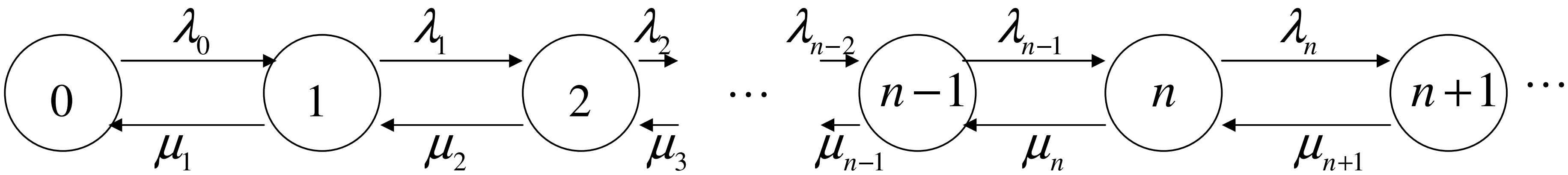
mort $\leftrightarrow$ départ du client du système après son service

Dans le processus de naissance et de mort:

Naissance $\leftrightarrow$ Le temps s'écoulant entre deux naissances consécutives est distribué exponentiellement

Mort $\leftrightarrow$ Le temps s'écoulant entre deux morts consécutives est aussi distribué exponentiellement

Diagramme de transition entre les états



λ_n = Taux moyen de naissance lorsque n personnes sont dans le système

μ_n = Taux moyen de mort lorsque n personnes sont dans le système

Le processus de naissance et de mort peut être considéré comme une chaîne de Markov en temps continu où les densités de transitions sont spécifiées à l'aide des λ_n et μ_n.

MAIS les équations d'équilibre suivantes donne un système d'équations plus facile à résoudre pour identifier les π_j:

$$\pi_j q_j = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{M} \pi_i q_{ij} \qquad j \in \{0, \ldots, M\}$$

$$\sum_{j=0}^{M} \pi_j = 1$$

Interprétation intuitive:

$\pi_j q_j$: taux auquel le processus part de j

puisque π_j : probabilité (à l'équilibre) que le processus soit dans l'état j

q_j : taux de transition pour sortir de l'état j étant donné que le processus est dans l'état j

$\pi_i q_{ij}$: taux de passage de l'état i à l'état j

puisque q_{ij} : taux de transition de l'état i à l'état j étant donné que le processus est dans l'état i

$\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{M} \pi_i q_{ij}$: taux de passage à l'état j quelque soit l'état i dans lequel se trouve le processus

Donc il s'ensuit que

taux de départ de j = taux d'arrivée à j

Interprétation intuitive:

$\pi_j q_j$: taux auquel le processus part de j

puisque π_j : probabilité (à l'équilibre) que le processus soit dans l'état j

q_j : taux de transition pour sortir de l'état j étant donné que le processus est dans l'état j

$\pi_i q_{ij}$: taux de passage de l'état i à l'état j

puisque q_{ij} : taux de transition de l'état i à l'état j étant donné que le processus est dans l'état i

$\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{M} \pi_i q_{ij}$: taux de passage à l'état quelque soit l'état i dans lequel se trouve le processus

Donc il s'ensuit que

taux de départ de j = taux d'arrivée à j

Nous utilisons donc par la suite ces

ÉQUATIONS DE BALANCE

ÉQUATIONS DE BALANCE

Équations d'équilibre

$$\pi_j q_j = \sum_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{M} \pi_i q_{ij} \qquad j \in \{0,\ldots,M\}$$

$$\sum_{j=0}^{M} \pi_j = 1$$

Intensités de transition

$$q_j = \sum_{\substack{i=0 \\ j\neq i}}^{M} q_{ji}.$$

Remplaçons les valeurs des q_j dans les équations d'équilibre:

$$\pi_j q_j = \sum_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{M} \pi_i q_{ij} \iff \pi_j \sum_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{M} q_{ji} = \sum_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{M} \pi_i q_{ij} \qquad j \in \{0,\ldots,M\}$$

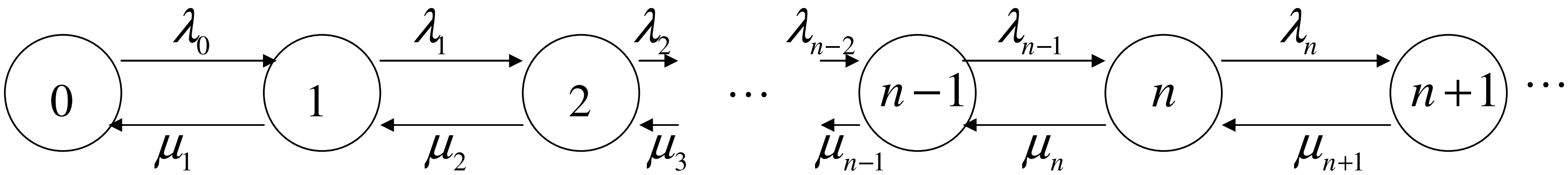
Donc les équations de balance deviennent

$$\pi_j \sum_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{M} q_{ji} = \sum_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{M} \pi_i q_{ij} \qquad j \in \{0,\ldots,M\}$$

$$\sum_{j=0}^{M} \pi_j = 1$$

taux de départ de j = taux d'arrivée à j

Diagramme de transition entre les états



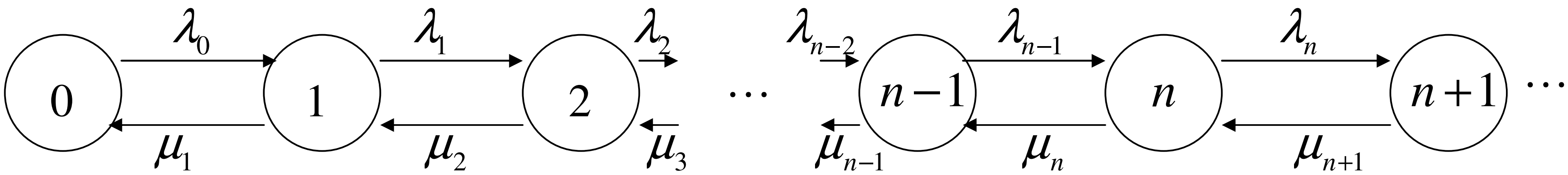
λ_n = Taux moyen de naissance lorsque n personnes sont dans le système

μ_n = Taux moyen de mort lorsque n personnes sont dans le système

Le processus de naissance et de mort peut être considéré comme une chaîne de Markov en temps continu où les densités de transitions sont spécifiées à l'aide des λ_n et μ_n.

Nous pouvons donc appliquer les équations de balance pour déterminer les probabilités à l'équilibre π_n.

Diagramme de transition entre les états



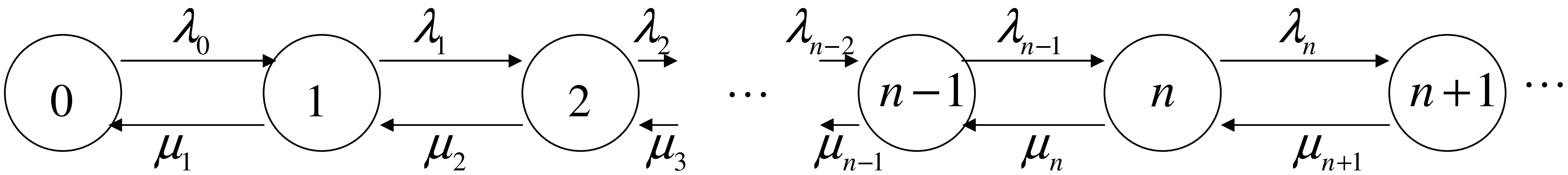
Nous pouvons donc appliquer les équations de balance pour déterminer les probabilités à l'équilibre π_n.

Équations de balance deviennent

$$\pi_j \sum_{i \neq j} q_{ji} = \sum_{i \neq j} \pi_i q_{ij} \qquad j = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\sum_j \pi_j = 1$$

Diagramme de transition entre les états



Équations de balance deviennent

$$\pi_j \sum_{i \neq j} q_{ji} = \sum_{i \neq j} \pi_i q_{ij} \qquad\qquad j = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\sum_j \pi_j = 1$$

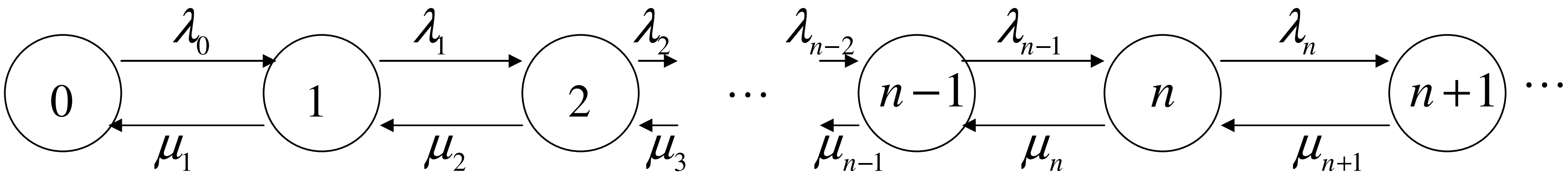
Pour $n = 0$

$$\pi_0 \lambda_o = \pi_1 \mu_1$$

Pour $n = 1, 2, \ldots$

$$\pi_n \left(\lambda_n + \mu_n \right) = \pi_{n-1} \lambda_{n-1} + \pi_{n+1} \mu_{n+1}$$

Diagramme de transition entre les états



État n

0 $$\pi_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0$$

1 $$\pi_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2}\pi_1 + \frac{1}{\mu_2}\underbrace{\left(\mu_1\pi_1 - \lambda_0\pi_0\right)}_{0} = \frac{\lambda_1}{\mu_2}\pi_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_2}\frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0$$

2 $$\pi_3 = \frac{\lambda_2}{\mu_3}\pi_2 + \frac{1}{\mu_3}\underbrace{\left(\mu_2\pi_2 - \lambda_1\pi_1\right)}_{0} = \frac{\lambda_2}{\mu_3}\pi_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_3}\frac{\lambda_1}{\mu_2}\frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0$$

$\vdots$

n $$\pi_{n+1} = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}}\pi_n + \frac{1}{\mu_{n+1}}\underbrace{\left(\mu_n\pi_n - \lambda_{n-1}\pi_{n-1}\right)}_{0} = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}}\pi_n = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}}\cdots\frac{\lambda_2}{\mu_3}\frac{\lambda_1}{\mu_2}\frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0$$

$\vdots$

Pour $n = 0$

$$\pi_0\lambda_o = \pi_1\mu_1$$

Pour $n = 1, 2, \ldots$

$$\pi_n\left(\lambda_n + \mu_n\right) = \pi_{n-1}\lambda_{n-1} + \pi_{n+1}\mu_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \pi_{n+1} = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}}\pi_n + \frac{1}{\mu_{n+1}}\left(\mu_n\pi_n - \lambda_{n-1}\pi_{n-1}\right)$$

État n

0 $\quad \pi_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0$

1 $\quad \pi_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2}\pi_1 + \frac{1}{\mu_2}\underbrace{(\mu_1\pi_1 - \lambda_0\pi_0)}_{0} = \frac{\lambda_1}{\mu_2}\pi_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_2}\frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0$

2 $\quad \pi_3 = \frac{\lambda_2}{\mu_3}\pi_2 + \frac{1}{\mu_3}\underbrace{(\mu_2\pi_2 - \lambda_1\pi_1)}_{0} = \frac{\lambda_2}{\mu_3}\pi_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_3}\frac{\lambda_1}{\mu_2}\frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0$

$\vdots$

n $\quad \pi_{n+1} = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}}\pi_n + \frac{1}{\mu_{n+1}}\underbrace{(\mu_n\pi_n - \lambda_{n-1}\pi_{n-1})}_{0} = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}}\pi_n = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}}\cdots\frac{\lambda_2}{\mu_3}\frac{\lambda_1}{\mu_2}\frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0$

$\vdots$

Pour simplifier

$$\pi_n = \frac{\prod_{i=0}^{n-1}\lambda_i}{\prod_{i=1}^{n}\mu_i}\pi_0 \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Pour simplifier

$$\pi_n = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^{n} \mu_i} \pi_0 \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Pour déterminer π_0, nous utilisons

$$1 = \sum_j \pi_j = \pi_0 + \sum_{n\geq 1} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^{n} \mu_i} \pi_0 \iff \pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n\geq 1} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^{n} \mu_i}}$$

Équations de balance deviennent

$$\pi_j \sum_{i\neq j} q_{ji} = \sum_{i\neq j} \pi_i q_{ij} \qquad j = 0, 1, 2, \ldots$$

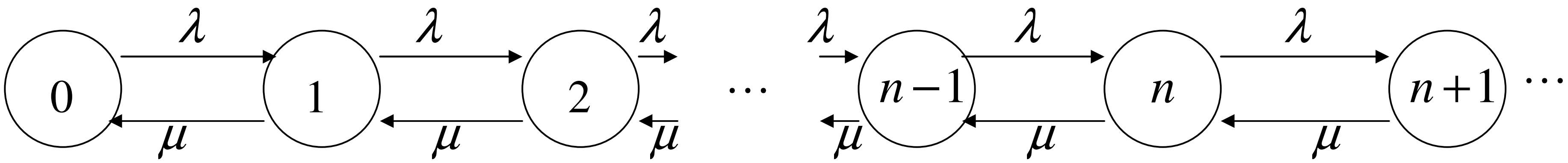
$$\boxed{\sum_j \pi_j = 1}$$

3. File d'attente infinie avec un serveur $(s=1)$: $M/M/1$

Considérons un modèle de file d'attente où les arrivées et les départs se produisent comme dans un processus de naissance et de mort où

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda_n \equiv \lambda & \forall n \\ \mu_n \equiv \mu & \forall n \end{array}\right\} \text{ i.e., indépendants du nombre de clients dans le système}$$

Diagramme de transition entre les états



$$\pi_n = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^{n} \mu_i} \pi_0 \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^{n} \mu_i}}$$

Alors

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^{n} \mu_i}} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n}$$

Sous l'hypothèse que $\lambda < \mu$ (le taux d'arrivée est plus petit que le taux de service)

$\frac{\lambda}{\mu} < 1$, et la progression géométrique

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}$$

Notons que la condition $\frac{\lambda}{\mu} < 1$ assure que le système pout atteindre l'équilibre. Autrement le système explose!!

Alors

$$P_0 = \frac{1}{1+\sum_{n\geq 1}\frac{\prod_{i=0}^{n-1}\lambda_i}{\prod_{i=1}^{n}\mu_i}} = \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$$

Sous l'hypothèse que $\lambda<\mu$ (le taux d'arrivée est plus petit que le taux de service)

$\frac{\lambda}{\mu}<1$, et la progression géométrique

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}}$$

Par conséquent,

$$P_0 = \frac{1}{\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}}} = 1-\frac{\lambda}{\mu}$$

Par conséquent,

$$P_0 = \frac{1}{\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}}} = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

De plus

$$P_n = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^{n} \mu_i} P_0 = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \pi_n = \dfrac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^{n} \mu_i} \pi_0 \qquad n = 1, 2, \dots \\[2em] \pi_0 = \dfrac{1}{1 + \sum_{n \geq 1} \dfrac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^{n} \mu_i}} \end{array}}$$

Introduison la notion de facteur d'utilisation

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

ρ représente en quelque sorte la proportion du temps que le serveur est occupé.

Il s'ensuit que

$$P_n = (1-\rho)\,\rho^n \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

Il s'ensuit que

$$P_n = (1-\rho)\,\rho^n \qquad\qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Calculons maintenant les caractéristiques de la file d'attente $M/M/1$

a) Nombre moyen de clients dans le système

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \sum_{n=0}^{\infty} n(1-\rho)\,\rho^n$$

$$= (1-\rho)\,\rho \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^{n-1} = (1-\rho)\,\rho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{d\rho}(\rho)^n$$

$$= (1-\rho)\,\rho \frac{d}{d\rho}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n\right)$$

$$= (1-\rho)\,\rho \frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{1-\rho}\right) = (1-\rho)\,\rho \frac{1}{(1-\rho)^2}$$

$$= \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

Il s'ensuit que

$$P_n = (1-\rho)\rho^n \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\boxed{L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}}$$

b) Nombre moyen de clients dans la file d'attente

$$\begin{aligned}
L_q &= \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) P_n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n P_n - \sum_{n=1}^{\infty} P_n \\
&= L - (1 - P_0) \\
&= \frac{\lambda}{\mu - \lambda} - \frac{\lambda}{\mu} \\
&= \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$P_n = (1-\rho)\rho^n \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

$$\boxed{L = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}} \qquad \boxed{L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}}$$

c) Temps moyen pour un client dans le système

$$W = \frac{L}{\bar{\lambda}} = \frac{L}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda} \qquad \left(\text{puisque } \bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n P_n = \lambda\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \lambda\right)$$

d) Temps moyen pour un client dans la file d'attente

$$W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}} = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}\frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

4. File d'attente infinie avec s serveurs : $M / M / s$

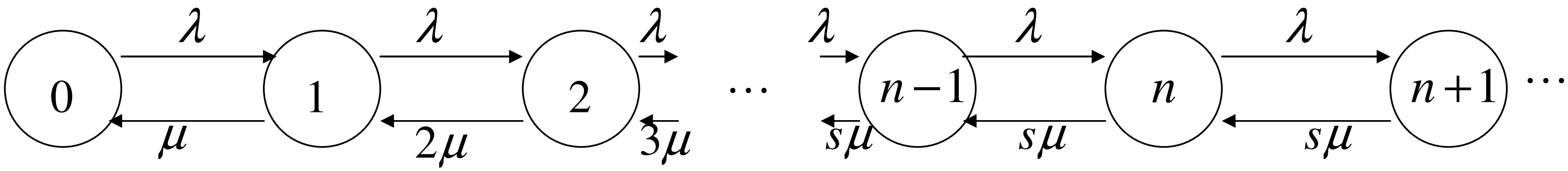
Considérons un modèle de file d'attente où les arrivées et les départs se produisent comme dans un processus de naissance et de mort où

$$\lambda_n \equiv \lambda \qquad \forall n$$

$$\left.\begin{aligned} &\mu_1 \equiv \mu \\ &\mu_2 \equiv 2\mu \\ &\mu_3 \equiv 3\mu \\ &\quad\vdots \\ &\mu_{s-1} \equiv (s-1)\mu \\ &\mu_n \equiv s\mu \qquad \forall n \geq s \end{aligned}\right\}$$

chaque serveur a un taux de service de μ, mais le taux de service depend du nombre de clients dans le système; si le nombre est inférieur à s seul un sous-ensemble de serveurs egal au nombre de clients sont actifs; si le nombre de clients est superieur ou égal a s, les s serveurs sont actifs

Diagramme de transition entre les états



Dénotons le facteur d'utilisation ρ comme suit:

$$\rho_s = \frac{\lambda}{s\mu} < 1.$$

Notons que la condition $\rho_s = \dfrac{\lambda}{s\mu} < 1$ assure que le système pout atteindre l'équilibre. Autrement le système explose!!

S'appuyant sur les équations de balance, nous pouvons déterminer les probabilités P_n

Équations de balance deviennent

$$\pi_j \sum_{i \neq j} q_{ji} = \sum_{i \neq j} \pi_i q_{ij} \qquad j = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\sum_j \pi_j = 1$$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!} \frac{1}{1-\rho_s} \right]^{-1}$$

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} P_0 & \text{si } 1 \le n \le s \\ \dfrac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{s!(n-s)!} P_0 & \text{si } s+1 \le n \end{cases}$$

$$L_q = \frac{P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \rho_s}{s!(1-\rho_s)^2}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$L = \lambda W = \lambda \left[W_q + \frac{1}{\mu} \right] = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

5. File d'attente finie avec 1 serveur $(s=1)$: $M/M/1/K$

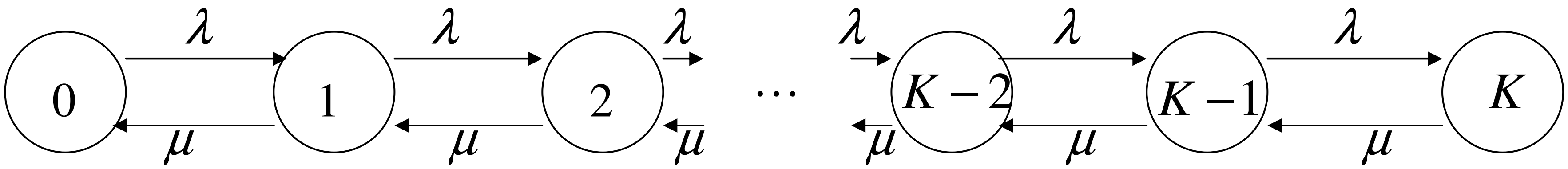
Considérons la situation où le système a une capacité finie K; i.e., si le nombre de clients dans le système est K, alors il ne peut entrer dans le système et il est perdu.

Nous avons donc un modèle de file d'attente où les arrivées et les départs se produisent comme dans un processus de naissance et de mort où

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & \text{si } n \le K-1 \\ 0 & \text{si } n \ge K \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} \mu & \text{si } n \le K \\ 0 & \text{si } n \ge K+1 \end{cases}$$

Diagramme de transition entre les états



Alors

$$P_0 = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{K}\frac{\prod_{i=0}^{n-1}\lambda_i}{\prod_{i=1}^{n}\mu_i}} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{K}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$$

$$\pi_n = \frac{\prod_{i=0}^{n-1}\lambda_i}{\prod_{i=1}^{n}\mu_i}\pi_0 \qquad n = 1,\ldots,K$$

$$\pi_0 = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{K}\frac{\prod_{i=0}^{n-1}\lambda_i}{\prod_{i=1}^{n}\mu_i}}$$

Sous l'hypothèse que $\lambda<\mu$ (le taux d'arrivée est plus petit que le taux de service)

$\frac{\lambda}{\mu} < 1$, alors

$$\sum_{n=0}^{K}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \frac{1}{\left[\frac{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}}{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}\right]}$$

Notons que la condition $\frac{\lambda}{\mu} < 1$ assure que le système pout atteindre l'équilibre. Autrement le système explose!!

Alors

$$P_0 = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{K}\frac{\prod_{i=0}^{n-1}\lambda_i}{\prod_{i=1}^{n}\mu_i}} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{K}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$$

Sous l'hypothèse que $\lambda<\mu$ (le taux d'arrivée est plus petit que le taux de service)

$\frac{\lambda}{\mu}<1$, alors

$$\sum_{n=0}^{K}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \left[\frac{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}}{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}\right]$$

Par conséquent,

$$P_0 = \frac{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}$$

où $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

Par conséquent,

$$P_0 = \frac{1-\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)}{1-\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}$$

où $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$

$$\pi_n = \frac{\prod_{i=0}^{n-1}\lambda_i}{\prod_{i=1}^{n}\mu_i}\pi_0 \qquad n = 1,\ldots,K$$

$$\pi_0 = \frac{1}{1+\sum_{n\geq 1}\dfrac{\prod_{i=0}^{n-1}\lambda_i}{\prod_{i=1}^{n}\mu_i}}$$

De plus, pour $n = 1,\ldots,K$

$$P_n = \frac{\prod_{i=0}^{n-1}\lambda_i}{\prod_{i=1}^{n}\mu_i} P_0 = P_0\rho^n = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\rho^n$$

Donc pour $n = 0, 1, \ldots, K$

$$P_n = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\rho^n$$

Calculons maintenant les caractéristiques de la file d'attente $M/M/1$

$$L = \sum_{n=0}^{K} nP_n = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(K+1)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}} \qquad W = \frac{L}{\lambda}$$

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_n = L - (1-P_0) \qquad W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$