EXERCICE N°11 : Révision

Exercice 1 : **(fait en amphi)**

On considère le système dynamique décrit par une représentation sous forme du schéma-bloc suivant :

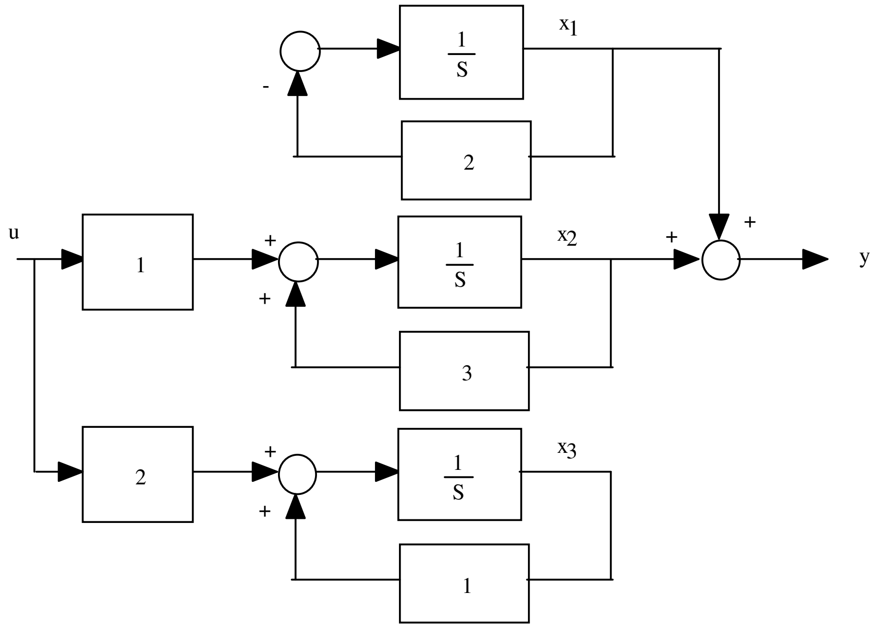


Fig. 1 Représentation du système sous forme de schéma-bloc

a) Donner une représentation d'état du système.
b) Le système est-il observable ? Si le système n'est pas complètement observable, caractériser le Sous Espace Non Observable.
c) Le système est-il commandable ? Si le système n'est pas complètement commandable, caractériser le Sous Espace Commandable.
d) Que peut on dire de la stabilité du système ?
e) Donner la fonction de transfert du système reliant y(s) à u(s).

Exercice 2 : **(de a à e fait en amphi)**

Le système (voir fig. 2) est constitué :

- d'un premier réservoir ayant un niveau d'eau h_1. Il est alimenté par un débit d'eau u. De sa base s'échappe un débit d'eau dépendant du niveau h_1.
- d'un deuxième réservoir ayant un niveau d'eau h_2. Il est alimenté par le premier réservoir. De sa base s'échappe un débit d'eau dépendant du niveau h_2.

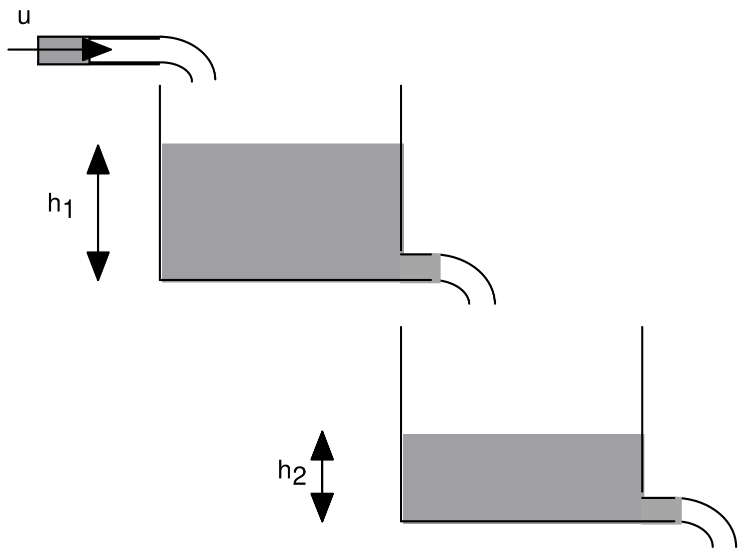


Fig. 2 : Réservoirs d'eau en cascade

La dynamique du système autour du point de fonctionnement nominal est décrite par les équations :

$$\begin{cases} \dot{\delta h}_1 + \delta h_1 = \delta u \\ \dot{\delta h}2 + \delta h2 = \delta h_1 \end{cases}$$

où δh_1 est la variation du réservoir 1, δh_2 est la variation du niveau du réservoir 2 et δu la variation du débit d'eau. La sortie mesurée du système est la variation du niveau du réservoir 2 : $y = \delta h_2$.

a) Montrer que si l'on considère $x = [\delta h_1, \delta h_2]^T$, la représentation d'état du système peut s'écrire sous la forme :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

b) Quelle est la fonction de transfert du système ?

c) Déterminer la loi de commande par retour d'état $\delta u = kx$ telle que les valeurs propres du système bouclé soient $-0.5 \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$.

d) Choisir un observateur de la forme $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + b\delta u + \ell(y - C\hat{x})$, dont la dynamique de l'erreur d'estimation est fixée par les valeurs propres $-1 \pm j\sqrt{3}$.

e) On souhaite déterminer une commande à base d'observateur qui impose au système bouclé les valeurs propres suivantes : $-0.5 \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-1 \pm j\sqrt{3}$. Déterminer la fonction de transfert H(s) de cette commande à base d'observateur.

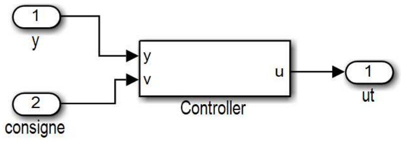
Pour mémoire, la correction réalisée en amphi nous a amené à la solution suivante :

Les équations d'état du système bouclé avec observateur sont :

Equation de la commande : $u = k\hat{x}$

Equation de l'observateur : $\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + bu + \ell(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$

On cherche la fonction de transfert de la commande fondée sur l'observateur, c'est-à-dire la relation E/S (Entrée/Sortie) (dans le domaine de Laplace) qui relie la mesure y à la commande u :



Par rapport à ce schéma, l'entrée consigne est nulle (donc on en tient pas compte). Ce qui revient à imposer, slide 88 du cours, $\mathbf{y_c = 0}$.

La transformée de Laplace de l'équation de la commande donne :

$$U(s) = k\hat{X}(s)$$

Il convient d'écrire, $\hat{X}(s)$, ce qui peut être réalisé à partir de l'équation de l'observateur. Si on remplace directement, $\hat{y}$ par $C\hat{x}$, nous avons :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + bu + \ell(y - C\hat{x}) \\ &= A\hat{x} + bk\hat{x} + \ell y - \ell C\hat{x} \\ &= (A + bk - \ell C)\hat{x} + \ell y \end{aligned}$$

d'où :

$$\hat{X}(s) = (sI - (A + bk - \ell C))^{-1} \ell Y(s)$$

La fonction de transfert recherchée s'écrit finalement :

$$H(s) = \frac{U(s)}{Y(s)} = k(sI - (A + bk - \ell C))^{-1} \ell$$

Remarque : c'est U qui est la sortie du régulateur et Y l'entrée, la FdT est bien le rapport :

$$\frac{Sortie}{Entrée}$$

Calculons, cette fonction de transfert en fonction des résultats trouvés précédemment.

$$A+bk-\ell C=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 3\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0 & -4\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\left(sI-\left(A+bk-\ell C\right)\right)=\begin{pmatrix}s & 4\\ -1 & s+1\end{pmatrix}$$

$$H(s)=k\left(sI-\left(A+bk-\ell C\right)\right)^{-1}\ell$$
$$=\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s & 4\\ -1 & s+1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{s+1}{s^2+s+4} & \dfrac{-4}{s^2+s+4}\\ \dfrac{1}{s^2+s+4} & \dfrac{s}{s^2+s+4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{3(s+1)}{s^2+s+4}\\ \dfrac{3}{s^2+s+4}\end{pmatrix}$$
$$=\frac{3s}{s^2+s+4}$$

f) Le dispositif représenté sur la figure 3 permet de réaliser un système du 2ème ordre en réglant les paramètres n_1, n_2, d_1 et d_2.

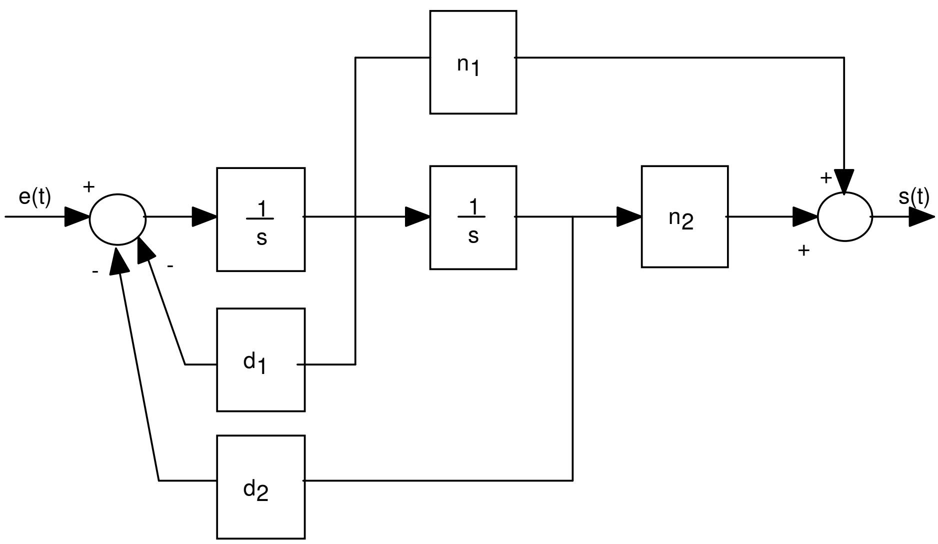
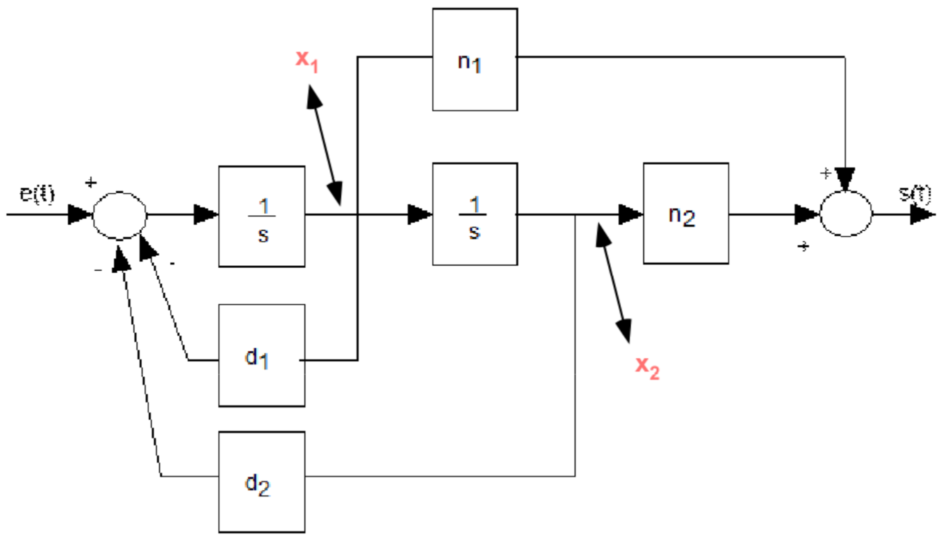


Fig. 3 : Dispositif à base d'intégrateurs élémentaires

Est-il possible d'utiliser ce dispositif pour implémenter la loi de commande à base d'observateur déterminée dans la question précédente ? Si oui, déterminer les paramètres n_1, n_2, d_1 et d_2.

En posant $x(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ tel que positionné sur la figure ci-dessous (et de manière à conserver $y(t) = x_2(t)$ comme pour la représentation d'état du a)).



La représentation d'état du système est :

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix} -d_1 & -d_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)+\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e(t)$$
$$s(t)=\begin{pmatrix} n_1 & n_2 \end{pmatrix} x(t)$$
$$y=\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

Cette représentation est sous forme canonique commandable. On peut directement déduire la fonction de transfert associée :

$$\frac{S(s)}{E(s)}=\frac{n_1 s+n_2}{s^2+d_1 s+d_2}$$

Remarque : on peut également retrouver ce résultat en calculant

$$\frac{S(s)}{E(s)}=C(sI-A)^{-1}B$$

Pour pouvoir implémenter la loi de commande du e), il faut identifier directement les coefficients des 2 fonctions de transfert : $n_1 = 3$; $n_2 = 0$; $d_1 = 1$ et $d_2 = 4$.