

INSA

INSTITUT NATIONAL
DES SCIENCES
APPLIQUÉES
CENTRE VAL DE LOIRE

DYNAMIQUE
&
VIBRATIONS

Patrice BAILLY

2 Dynamique et vibrations

Sommaire

CHAPITRE 1	5
LES EQUATIONS DE LA MECANIQUE DU SOLIDE	5
1.1. Représentation des efforts	5
1.1.1. Action mécanique et torseurs	5
1.1.2. Différentes propriétés des torseurs	6
1.1.3. Les différents types d'actions	6
1.2. Cinématique du solide	7
1.2.1. Distributeur de vitesses	7
1.2.2. Composition des vitesses	8
1.3. Cinétique	8
1.4.1. Torseur cinétique	8
1.4.2. Torseur dynamique	9
1.4.3. Principe fondamental de la dynamique	9
1.5. Energie et puissance	9
1.5.1. Puissance mécanique	9
1.5.2. Energie cinétique	10
1.5.3. Energie potentielle	10
1.5.4. Forces non conservatives	11
1.5.5. Principe des puissances virtuelles	11
1.5.6. Théorème de l'énergie cinétique	11
1.6. Mécanique analytique	12
1.6.1. Paramétrage	12
1.6.2. Liaisons	12
1.6.3. Forces généralisées	13
1.6.4. Equations de Lagrange	15
1.7. Mouvement autour d'un équilibre	17
1.7.1. Equilibre paramétrique	17
1.7.2. Stabilité d'un équilibre	17
1.7.3. Equations linéarisées	18
1.8. Exemples	19
1.8.1. Barre pendulaire	19

CHAPITRE 2	27
VIBRATION D'UN SYSTEME SIMPLE	27
2.2. Système conservatif	28
2.2.1. Oscillations libres	28
2.2.2. Oscillations forcées	29
2.3. Système dissipatif	31
2.3.1. Oscillations libres	31
2.3.2. Expérience de « lâcher »	32
2.3.2. Oscillations forcées	33
2.4. Réponse en fréquence et impédance complexe	36
2.4. Définition d'un système équivalent pour une structure	39
2.4.1. Méthode de Rayleigh	39
2.4.2. Exemple	40
CHAPITRE 3	43
VIBRATION D'UN SYSTEME A PLUSIEURS DEGRES DE LIBERTE	43
3.1. Modélisation d'une structure par un système discret	43
3.1.1. Modèle linéaire de structure	43
3.1.2. Equations du mouvement	44
3.2. Système conservatif	44
3.2.1. Recherche de modes propres	44
3.2.2. Projection sur base modale	46
3.2.3. Exemple	47
3.3. Système dissipatif	49
CHAPITRE 4	51
VIBRATION D'UNE STRUCTURE CONTINUE	51
4.1. Traction et compression	51
4.1.1. Equations du mouvement	51
4.1.2. Modes de vibrations	52
4.2. Cordes et câbles	53
4.3. Poutre en flexion	53
4.3.1. Equation du mouvement	53
4.2.2. Modes propres de déformation	55
4.2.3. Projection sur base modale	58

Chapitre 1

Les équations de la mécanique du solide

*Ce chapitre réunit des notions utiles en mécanique du solide qui conduisent à expliciter les équations du mouvement d'un solide ou d'un système de solides. Il est rappelé les définitions des éléments de cinématique et de cinétique du solide. L'obtention des équations qui régissent le mouvement, ou l'équilibre, des solides reposent sur le **principe fondamental** de la dynamique. Ce principe peut être, de manière équivalente, remplacé par le **principe des puissances virtuelles**. Il est présenté les bases de la mécanique analytique qui reposent sur une représentation cinématique paramétrique. Le principe fondamental se traduit par des équations que vérifient les paramètres : ce sont les **équations de Lagrange**.*

1.1. Représentation des efforts

1.1.1. Action mécanique et torseurs

D'un point de vue mathématique la géométrie d'un solide est décrite dans un espace affine. Une action mécanique sur un solide peut s'exercer par contact ou par action à distance (pesanteur). La réalité physique de l'action peut être assez complexe (répartition de pressions...) mais peut toujours être représentée dans un espace vectoriel associé à l'espace affine, par un torseur.

$$\text{Torseur : } \{T\} = \{ \underline{R} / \underline{M}_{/Q} \}$$

Un torseur se caractérise par ses "éléments de réduction" en un point :

- le vecteur somme, ou résultante, qui est le même pour tout point de l'espace ;

$$\underline{R} = \sum \underline{F} + \iiint \underline{f}(\underline{x}) dv + \iint \underline{t}(\underline{x}) ds$$

\underline{F} représente une force ponctuelle, \underline{f} une force par unité de volume (généralement la pesanteur) et \underline{t} une force par unité de surface.

- le vecteur moment, qui obéit à la formule de transport de moment.

$$\underline{M}_{/Q} = \sum \underline{OM} \wedge \underline{F}(M) + \iiint \underline{x} \wedge \underline{f}(\underline{x}) dv + \iint \underline{x} \wedge \underline{t}(\underline{x}) ds$$

$$\text{Formule de transport : } \underline{M}_{/Q} = \underline{M}_{/P} + \underline{QP} \wedge \underline{R}$$

1.1.2. Différentes propriétés des torseurs

Parmi les différentes propriétés des torseurs, nous en citons trois qui sont souvent utilisées en statique :

- Invariant scalaire : le produit scalaire du vecteur somme et du vecteur moment d'un même torseur donne un résultat indépendant du point où est exprimé le moment.

$$\mathfrak{T} = \underline{R} \cdot \underline{M}/O$$

- Equiprojectivité du moment : si on considère un torseur et 2 points P et Q où l'on calcule le moment de ce torseur, nous avons la propriété suivante,

$$\underline{M}/P \cdot \underline{PQ} = \underline{M}/Q \cdot \underline{PQ}$$

- Axe central : pour tout torseur il existe une droite de l'espace appelée axe central telle que, en tout point de cette droite, la résultante et le moment soient colinéaires. Si l'invariant scalaire est nul, l'axe central est une droite où le moment est nul. L'équation de l'axe central est donnée par la formule suivante :

$$\underline{OQ} = \frac{\underline{R} \wedge \underline{M}_O}{\underline{R}^2} + \lambda \underline{R}$$

1.1.3. Les différents types d'actions

On peut associer un torseur à une action mécanique. Une action se traduit par :
des forces en certains points,
une répartition de pression sur une surface,
une répartition de forces volumiques dans un domaine.

Le torseur associé est représenté par la résultante (somme des forces ou intégrale des densités de forces) et par le moment résultant.

Selon les caractéristiques du torseur qui les représentent, on classe les différentes actions de la manière suivantes.

$$\underline{R} = \underline{O} \begin{cases} \underline{M}/O = \underline{O} & \text{torseur nul} \\ \underline{M}/O \neq \underline{O} & \text{torseur couple} \end{cases}$$

$$\underline{R} \neq \underline{O} \begin{cases} \mathfrak{T} = O & \text{torseur vecteur} \\ \mathfrak{T} \neq O & \text{torseur quelconque} \end{cases}$$

Remarque : le torseur vecteur est associé à ce que l'on nomme communément une "force ponctuelle", \underline{R} représente la force et l'axe central est le "support" de cette force. Un torseur quelconque peut s'exprimer comme la somme d'un torseur couple et d'un torseur vecteur.

1.1.4. Efforts intérieurs et extérieurs

Si on étudie un ensemble de plusieurs solides, il est possible de différencier les efforts intérieurs et les efforts extérieurs. Considérons un ensemble de deux solides 1 et 2. Il est possible de différencier, pour chaque solide les actions qui viennent de l'extérieur et celles qui viennent de l'autre solide.

$$\{T_{(1 \rightarrow 1)}\} = \{T_{(ext \rightarrow 1)}\} + \{T_{(2 \rightarrow 1)}\} = \{T_{(ext \rightarrow 1)}\} - \{T_{(1 \rightarrow 2)}\}$$

$$\{T_{(1 \rightarrow 2)}\} = \{T_{(ext \rightarrow 2)}\} + \{T_{(1 \rightarrow 2)}\} = \{T_{(ext \rightarrow 2)}\} - \{T_{(2 \rightarrow 1)}\}$$

Les actions de l'extérieur sur l'ensemble sont constituées de la somme des actions de l'extérieur sur chacun des solides.

$$\{T_{(ext \rightarrow 1+2)}\} = \{T_{(ext \rightarrow 1)}\} + \{T_{(ext \rightarrow 2)}\}$$

Les efforts intérieurs correspondent aux actions d'un solide sur l'autre.

$$\{T_{(int(1+2))}\} = \{T_{(2 \rightarrow 1)}\}$$

Il y a ambiguïté sur le signe des efforts intérieurs. Nous verrons plus loin que cette ambiguïté sera sans inconvénient pour le calcul des puissances.

Pour un ensemble S de n solides, les efforts extérieurs seront ainsi définis :

$$\{T_{(ext \rightarrow S)}\} = \sum_n \{T_{(ext \rightarrow n)}\}$$

Et les efforts intérieurs :

$$\{T_{(int(S))}\} = \sum_{n>m} \{T_{(m \rightarrow n)}\}$$

1.2. Cinématique du solide

1.2.1. Distributeur de vitesses

Le mouvement d'un solide est décrit par un torseur distributeur des vitesses.

$$\{D\} = \{\underline{\Omega}, \underline{V}_0\}$$

La distance de deux points restant constante, il existe une relation entre leurs vitesses.

$$\underline{V}_Q = \underline{V}_0 + \underline{OQ} \wedge \underline{\Omega}$$

La classification des torseurs différencie les types de mouvements :

$$\underline{\Omega} = \underline{0} \quad \begin{cases} \underline{V}_Q = \underline{0} & \text{immobilité} \\ \underline{V}_Q \neq \underline{0} & \text{translation} \end{cases}$$

$$\underline{\Omega} \neq \underline{0} \quad \begin{cases} \mathfrak{S} = 0 & \text{mouvement "plan sur plan"} \\ \mathfrak{S} \neq 0 & \text{mouvement quelconque} \end{cases}$$

Dans le mouvement plan sur plan, l'axe central correspond à l'axe instantané de rotation.

1.2.2. Composition des vitesses

Nous rappelons la formule du changement de référentiel. Soit un repère (a) et un repère (r), centré en o', dont le mouvement par rapport à (a) est défini par :

$$\{D(r/a)\} = \left\{ \underline{\Omega}_{r/a}, \underline{V}_{o'}^a \right\}$$

La vitesse d'un point Q :

$$\underline{V}_Q^a = \underline{V}_Q^r + \underline{V}_{(Q \text{ fixe dans } r)}^a$$

Le dernier terme est la vitesse d'entraînement

$$\underline{V}_{(Q \text{ fixe dans } r)}^a = \underline{V}_{o'} + \underline{QO'} \wedge \underline{\Omega}_{r/a}$$

L'accélération d'un point :

$$\underline{\gamma}_Q^a = \underline{\gamma}_Q^r + \underline{\gamma}_{(Q \text{ fixe dans } r)}^a + 2 \underline{\Omega}_{r/a} \wedge \underline{V}_Q^r$$

Le deuxième terme est l'accélération d'entraînement (dérivé dans a de la vitesse d'entraînement),
Le dernier terme est l'accélération de Coriolis.

1.3. Cinétique

1.4.1. Torseur cinétique

On définit le torseur cinétique d'un solide (ou système) dans un certain repère.

$$\{C\} = \{ \underline{P}, \underline{\sigma}_O \}$$

La quantité de mouvement :

$$\underline{P} = \iiint_v \rho \underline{V} dv$$

Le moment cinétique :

$$\underline{\sigma}_O = \iiint_v \underline{OM} \wedge \rho \underline{V}(M) dv$$

La cinétique introduit les caractéristiques d'inertie.

Masse m et centre d'inertie G :

$$\underline{P} = m \underline{V}(G)$$

Opérateur d'inertie, qui relie le moment cinétique au taux de rotation :

$$\underline{\underline{\mathfrak{I}}}_O \text{ t.q. } \underline{\sigma}_O = \underline{\underline{\mathfrak{I}}}_O \underline{\Omega}$$

L'opérateur d'inertie est une matrice 3x3 dont les termes diagonaux sont les moments d'inertie et les termes non diagonaux les produits d'inertie. On l'exprime généralement dans un repère lié au solide

1.4.2. Torseur dynamique

On définit le torseur dynamique d'un solide (ou système) Ω dans un certain repère.

$$\{A\} = \{\underline{A}, \underline{\mu}_O\}$$

La quantité d'accélération :

$$\underline{A} = \iiint \rho \underline{\gamma} dv$$

Le moment dynamique :

$$\underline{\mu}_O = \iiint \underline{OM} \wedge \rho \underline{\gamma}(M) dv$$

Le moment dynamique n'est, en général, pas la dérivée du moment cinétique (sauf si ce dernier est exprimé en G ou en un point fixe).

1.4.3. Principe fondamental de la dynamique

Le principe fondamental de la mécanique admet que, dans un référentiel galiléen, le torseur dynamique d'un solide, ou d'un système, est égal au torseur des actions extérieures sur ce solide ou ce système.

$$\{T_{\text{ext}}\} = \{A\}$$

Ce principe est également connu sous le nom de « deuxième loi de Newton ».



Isaac Newton
1643 - 1727

1.5. Energie et puissance

1.5.1. Puissance mécanique

La puissance mécanique est définie pour une force comme le produit scalaire de cette force par la vitesse de son point d'application.

$$\Pi = \underline{F} \cdot \underline{V}$$

Pour un solide la puissance mécanique est définie par le produit scalaire des torseurs distributeur de vitesse et action mécanique.

$$\Pi = \sum \underline{F}_Q \cdot \underline{V}_Q + \iiint \underline{f}(\underline{x}) \cdot \underline{V}(\underline{x}) \, dv + \iint \underline{t}(\underline{x}) \cdot \underline{V}(\underline{x}) \, ds$$

$$\Pi = \{\underline{T}\} \times \{\underline{D}\} = \underline{s} \cdot \underline{V}_0 + \underline{\Omega} \cdot \underline{m}_0$$

Pour l'étude d'un ensemble S de n solides, il est possible de calculer la puissance des efforts extérieurs et la puissance des efforts intérieurs. Pour cela, la cinématique devra définir le torseur cinématique de chaque solide par rapport à un repère général (0) :

$$\{D(n/0)\}$$

Et les torseurs du mouvement d'un solide n par rapport à un autre m.

$$\{D(n/m)\} = \{D(n/0)\} - \{D(m/0)\}$$

Les puissances des efforts extérieurs et intérieurs s'expriment ainsi :

$$\Pi_e = \sum_n \{T_{(ext \rightarrow n)}\} \times \{D(n/0)\}$$

$$\Pi_i = \sum_{n>m} \{T_{(m \rightarrow n)}\} \times \{D(n/m)\}$$

On note que l'ambiguïté sur le signe des efforts intérieurs n'existe plus sur la puissance des efforts intérieurs.

1.5.2. Energie cinétique

L'énergie cinétique est définie par la quantité suivante :

$$K = \frac{1}{2} \iiint \rho \underline{V}^2 \, dv$$

Pour un solide l'énergie cinétique peut également s'écrire en fonction en fonction des éléments du torseur cinétique en G.

$$K = \frac{1}{2} \left(m \underline{V}_G^2 + \underline{\Omega}_G \underline{\mathfrak{I}}_G \underline{\Omega}_G \right)$$

1.5.3. Energie potentielle

Certaines actions mécaniques fournissent un travail de manière réversible, c'est à dire que lors d'un mouvement, si l'état initial est le même que l'état final, le travail fourni est nul. Dans ce cas on peut écrire que les forces dérivent d'un potentiel Ψ . La force est l'opposée du gradient de ce potentiel.

$$\underline{F} = -\nabla \Psi \quad \left(F_i = -\frac{\partial \Psi}{\partial x_i} = -\Psi_{,i} \right)$$

C'est le cas, par exemple, des forces de pesanteur et des actions élastiques.

- pesanteur : $\Psi = m g z$ ($z = \text{altitude}$)

- ressort : $\Psi = \frac{1}{2} k x^2$ ($x = \text{allongement}$)

1.5.4. Forces non conservatives

Certaines actions dissipent de l'énergie, de manière irréversible. C'est le cas des forces de frottement (le frottement est dit « sec » si la force est indépendante de la vitesse de glissement, et visqueux si la force est proportionnelle à la vitesse) et des forces de résistance aérodynamique (proportionnelles au carré de la vitesse).

1.5.5. Principe des puissances virtuelles

Le principe des puissances virtuelles traduit en deux axiomes les équations fondamentales de la mécanique. Nous considérons, dans un référentiel galiléen, un système mécanique, qui subit certaines actions, intérieures et extérieures, et est animé d'un certain mouvement.

Axiome 1 :

Pour tout champ de vecteurs vitesse (mouvement virtuel), la puissance développée par les efforts extérieurs, avec les vitesses virtuelles, ajoutée à la puissance des efforts intérieurs est égale à la puissance des quantités d'accélération.

$$\forall m \underline{\hat{v}} \quad \Pi_e(\underline{\hat{v}}) + \Pi_i(\underline{\hat{v}}) = \Pi_a(\underline{\hat{v}})$$

Axiome 2 :

Pour tout champ de vecteur vitesse correspondant à un mouvement virtuel rigidifiant (de solide), la puissance des efforts intérieurs est nulle.

$$\forall m \underline{\hat{v}} \quad \Pi_i(\underline{\hat{v}}) = 0$$

1.5.6. Théorème de l'énergie cinétique

Il s'agit du cas particulier du principe des puissances virtuelles lorsque l'on considère le mouvement réel.

$$K(\underline{V}) = \frac{1}{2} \int \rho \underline{V}^2 dv$$

La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique est la puissance des quantités d'accélération.

$$\Pi_e + \Pi_i = \frac{d}{dt} K$$

1.6. Mécanique analytique

1.6.1. Paramétrage

Le problème est de trouver les positions actuelles \underline{x} , à l'instant t , connaissant les positions initiales \underline{X} . Pour un système de solides indéformables, ceci peut se faire grâce un nombre fini de paramètres scalaires (coordonnées des centre de gravité, positions angulaires, distance relative...).

$$\underline{x}(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

Toutes les grandeurs du système peuvent s'exprimer en fonction de ces paramètres.

1.6.2. Liaisons

Une liaison mécanique se traduit par une relation que doivent respecter certains paramètres. Il existe deux types de liaisons. Une liaison est dite holonome s'il existe uniquement une relation entre les paramètres de position et, éventuellement le temps de manière explicite.

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0$$

Une liaison est dite non holonome s'il existe une relation entre les paramètres de position, leurs dérivées et le temps.

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) = 0$$

Un exemple de liaison non holonome est celui d'une roue, ou un disque, qui roule sur un plan (le disque restant perpendiculaire au plan). On peut retenir quatre paramètres pour définir la position (le taux de rotation du disque est $\underline{\Omega} = \dot{\theta} \underline{v} + \dot{\psi} \underline{z}$).

$$q_1 = x_G \quad q_2 = y_G \quad q_3 = \theta \quad q_4 = \psi$$

La condition de roulement sans glissement se traduit par deux relations non holonomes.

$$\begin{cases} \dot{x}_G - R\dot{\theta} \cos \psi = 0 \\ \dot{y}_G - R\dot{\theta} \sin \psi = 0 \end{cases}$$

Le nombre de degrés de liberté est le nombre de paramètres moins le nombre d'équations de liaisons.

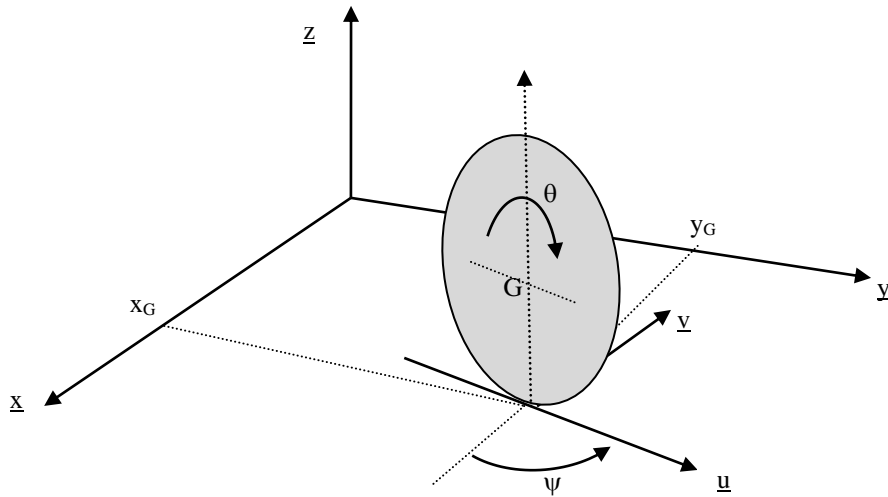


Figure 1.1. Disque roulant sur un plan, exemple de liaison non holonome.

1.6.3. Forces généralisées

Force en un point

Une force \underline{F} est appliquée en un point M . Nous allons écrire la puissance développée par cette force en fonction des paramètres. Pour cela nous allons d'abord exprimer la vitesse en fonction des paramètres. Le vecteur vitesse est la dérivée du vecteur position.

$$\underline{V}(M) = \frac{d}{dt} \underline{x}(M)$$

La position dépend des paramètres et éventuellement explicitement du temps. On en déduit une expression de la vitesse en fonction des paramètres.

$$\underline{x}(q_i, t) \rightarrow \underline{V} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \underline{x}}{\partial t}$$

On remarque l'égalité, pour la « vitesse partielle » :

$$\frac{\partial \underline{V}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_i}$$

Ce qui permet de formuler la vitesse selon l'expression suivante :

$$\underline{V} = \frac{\partial \underline{V}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \underline{x}}{\partial t}$$

La puissance développée par la force F pourra alors s'écrire ainsi :

$$\Pi = \underline{F} \cdot \underline{V}(M) \rightarrow \Pi = \left(\underline{F} \cdot \frac{\partial \underline{V}}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \left(\underline{F} \cdot \frac{\partial \underline{x}}{\partial t} \right) = Q_i \dot{q}_i + Q_t$$

Cette expression fait apparaître un terme Q_i que l'on nomme force généralisée, ou facteur de puissance.

$$Q_i = \underline{F} \cdot \frac{\partial \underline{V}}{\partial \dot{q}_i}$$

Actions sur un solide

Les efforts sur un solide sont représentés par un torseur :

$$\{T\} = \{ \underline{R} / \underline{M} / G \}$$

La cinématique du solide est décrite à partir d'un torseur distributeur de vitesses :

$$\{D\} = \{ \underline{\Omega} / \underline{V}_G \}$$

Nous exprimons la vitesse en fonction des paramètres et, par similitude, nous faisons le même développement pour le taux de rotation.

$$\underline{V}_G = \frac{\partial \underline{V}_G}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \underline{x}(G)}{\partial t} \quad \text{et} \quad \underline{\Omega} = \frac{\partial \underline{\Omega}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \underline{\Omega}_t$$

Les termes de ces développements permettent de définir les torseurs distributeurs partiels :

$$\{D_i\} = \left\{ \frac{\partial \underline{\Omega}}{\partial \dot{q}_i} / \frac{\partial \underline{V}_G}{\partial \dot{q}_i} \right\} \quad \text{et} \quad \{D_t\} = \left\{ \underline{\Omega}_t / \frac{\partial \underline{x}(G)}{\partial t} \right\}$$

On peut vérifier que ces éléments ont bien une structure de torseur (vérifient la formule de transport). Le torseur distributeur de vitesses peut donc s'exprimer en fonction des distributeurs partiels.

$$\{D\} = \{D_i\} \dot{q}_i + \{D_t\}$$

Le calcul de la puissance peut utiliser cette décomposition.

$$\Pi = \{T\} \times \{D\} \rightarrow \Pi = (\{T\} \times \{D_i\}) \dot{q}_i + \{T\} \times \{D_t\}$$

Il apparaît alors les forces généralisées (quelquefois appelées facteurs de puissance) :

$$Q_i = (\{T\} \times \{D_i\}) \quad Q_t = \{T\} \times \{D_t\}$$

Il peut arriver que les forces s'expriment en fonction d'une fonction $U(q_1, \dots, q_n)$, qui peut être une énergie potentielle, selon l'expression :

$$Q_i = - \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

1.6.4. Equations de Lagrange

Un point matériel

Le principe fondamental de la dynamique fournit une équation vectorielle.

$$m \underline{\gamma} = \underline{F}$$

On obtient une équation scalaire en faisant le produit par un vecteur « vitesse partielle ».

$$m \underline{\gamma} \cdot \frac{\partial \underline{V}}{\partial \dot{q}_i} = \underline{F} \cdot \frac{\partial \underline{V}}{\partial \dot{q}_i}$$

Le second terme est la force généralisée.

$$\underline{F} \cdot \frac{\partial \underline{V}}{\partial \dot{q}_i} = Q_i$$

Le premier terme peut être développé.

$$m \underline{\gamma} \cdot \frac{\partial \underline{V}}{\partial \dot{q}_i} = m \frac{d\underline{V}}{dt} \cdot \frac{\partial \underline{V}}{\partial \dot{q}_i} = m \frac{d}{dt} \left(\underline{V} \cdot \frac{\partial \underline{V}}{\partial \dot{q}_i} \right) - m \underline{V} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \underline{V}}{\partial \dot{q}_i} \right)$$

Dans le dernier terme on tient compte de l'expression de la vitesse partielle vue plus haut.

$$m \underline{\gamma} \cdot \frac{\partial \underline{V}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V^2}{\partial \dot{q}_i} \right) - m \underline{V} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \underline{x}}{\partial \dot{q}_i} \right)$$

Il apparait l'énergie cinétique.

$$m \underline{\gamma} \cdot \frac{\partial \underline{V}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{1}{2} m \underline{V}^2 \right) \right) - m \underline{V} \cdot \frac{\partial \underline{V}}{\partial \dot{q}_i}$$

Ce qui fournit l'équation suivant dite équation de Lagrange. Il y a une équation de Lagrange pour chaque paramètre.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} = Q_i$$

Un solide

Le principe fondamental se traduit par l'égalité des torseurs action mécanique et quantité d'accélération

$$\{A\} = \{T\}$$

Nous faisons le produit



Joseph Louis Lagrange
1736 - 1813

$$\{A\} \times \{D_i\} = \{T\} \times \{D_i\}$$

Le premier terme correspond à l'intégrale sur le solide du produit scalaire de la quantité d'accélération avec la vitesse partielle. On peut développer ce terme comme précédemment.

$$\{A\} \times \{D_i\} = \iiint \rho \underline{\gamma} \cdot \frac{\partial \underline{V}}{\partial \dot{q}_i} dv = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_i}$$

Le second terme est la force généralisée.

$$\{T\} \times \{D_i\} = Q_i$$

On retrouve la même forme d'équation de Lagrange pour chaque paramètre.

Un système de solides

Considérons deux solides (1 et 2). Pour chaque solide nous pouvons écrire les équations de Lagrange.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K(1)}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial K(1)}{\partial q_i} = \{T_{(\rightarrow 1)}\} \times \{D_i(1/0)\}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K(2)}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial K(2)}{\partial q_i} = \{T_{(\rightarrow 2)}\} \times \{D_i(2/0)\}$$

Nous faisons la somme des termes de gauche. Il apparait l'énergie cinétique de l'ensemble qui est la somme des énergies cinétiques des solides.

$$\left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K(1)}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial K(1)}{\partial q_i} \right) + \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K(2)}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial K(2)}{\partial q_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} \quad (K = K(1) + K(2))$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} = \{T_{(\rightarrow 1)}\} \times \{D_i(1/0)\} + \{T_{(\rightarrow 2)}\} \times \{D_i(2/0)\}$$

Pour faire la somme des deux termes de droite (forces généralisées), nous décomposons les actions en deux parties : celles appliquées par l'extérieur à l'ensemble des solides et celle provenant de l'autre solide.

$$\{T_{(\rightarrow 1)}\} = \{T_{(ext \rightarrow 1)}\} + \{T_{(2 \rightarrow 1)}\} = \{T_{(ext \rightarrow 1)}\} - \{T_{(1 \rightarrow 2)}\}$$

$$\{T_{(\rightarrow 2)}\} = \{T_{(ext \rightarrow 2)}\} + \{T_{(1 \rightarrow 2)}\} = \{T_{(ext \rightarrow 2)}\} - \{T_{(2 \rightarrow 1)}\}$$

Ce qui donne la formulation suivante :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} = (\{T_{(ext \rightarrow 1)}\} - \{T_{(1 \rightarrow 2)}\}) \times \{D_i(1/0)\} + (\{T_{(ext \rightarrow 2)}\} + \{T_{(1 \rightarrow 2)}\}) \times \{D_i(2/0)\}$$

Ce qui s'écrit également ainsi :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} = \{T_{(ext \rightarrow 1)}\} \times \{D_i(1/0)\} + \{T_{(ext \rightarrow 2)}\} \times \{D_i(2/0)\} \\ + \{T_{(1 \rightarrow 2)}\} \times (\{D_i(2/0)\} - \{D_i(1/0)\})$$

Le dernier terme est le torseur cinématique partiel correspondant au mouvement du solide 2 par rapport au solide 1. La force généralisée est donc égale à la somme des forces généralisées de l'extérieur sur chaque solide plus la celle liée aux actions entre les solides.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} = \{T_{(ext \rightarrow 1)}\} \times \{D_i(1/0)\} + \{T_{(ext \rightarrow 2)}\} \times \{D_i(2/0)\} + \{T_{(1 \rightarrow 2)}\} \times \{D_i(2/1)\}$$

Ce qui vient d'être expliqué pour deux solides se généralise pour un système constitué de n solides.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} = \sum_n \{T_{(ext \rightarrow n)}\} \times \{D_i(n/0)\} + \sum_{n>m} \{T_{(m \rightarrow n)}\} \times \{D_i(n/m)\}$$

1.7. Mouvement autour d'un équilibre

1.7.1. Equilibre paramétrique

Nous considérons un système de solides S, constitué de p solides. Les positions de ce système sont définies par n paramètres. Il y a donc n équations de Lagrange pour régir les mouvements de ce système.

$$\underline{x}(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

L'équilibre par rapport à un paramètre q_i est observé s'il existe des conditions initiales telles que les équations du mouvement ne conduisent pas à une évolution de ce paramètre.

$$\exists (q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0, t_0) \quad t.q. \quad \forall t > t_0 \quad q_i(t) = q_i^0, \dot{q}_i(t) = 0$$

L'équilibre paramétrique est atteint s'il y a équilibre par rapport à tous les paramètres.

Si le temps n'apparaît pas explicitement dans la définition des positions, il s'agit d'un équilibre strict qui correspond à l'immobilité.

1.7.2. Stabilité d'un équilibre

La définition classique, et intuitive, consiste à dire que si le système est écarté, de manière modérée, de sa position d'équilibre le mouvement demeure proche de cette position d'équilibre.

$$\forall a, b (> 0) \quad \exists c, d (> 0) \quad t.q. : \\ \left| q_i^0 - q_i^e \right| < c \quad \text{et} \quad \left| \dot{q}_i^0 \right| < d \quad \Rightarrow \quad \forall t > t_0 \quad \left| q_i(t) - q_i^e \right| < a \quad \text{et} \quad \left| \dot{q}_i(t) \right| < b$$

Si on considère le lagrangien L, une condition de stabilité peut être énoncée.

$$L = K + U$$

Lorsque le lagrangien atteint, pour les paramètres de l'équilibre, un maximum local strict, l'équilibre est stable (théorème de Lejeune Dirichlet).

1.7.3. Equations linéarisées

Lorsque l'on a à étudier des mouvements d'amplitudes modérées autour d'une position d'équilibre, on peut souhaiter linéariser le système d'équation. Les solutions analytiques peuvent alors être explicitées. L'équilibre est caractérisé par certaines valeurs des paramètres.

$$\underline{q}^e (q_1^e, q_2^e, \dots, q_n^e)$$

Les équations de Lagrange se présentent formellement de la manière suivante :

$$a_{ij}(\underline{q})\ddot{q}_j + f_i(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) = 0$$

Nous utilisons les variables qui sont les écarts des valeurs des paramètres à celles de l'équilibre.

$$q_j = q_j^e + x_j \quad \dot{q}_j = \dot{x}_j \quad \ddot{q}_j = \ddot{x}_j \quad (x, \dot{x}, \ddot{x} \text{ petits})$$

Ces variables étant petites, nous allons alors considérer les équations avec les termes correspondant au premier ordre. Pour le premier terme cette simplification est immédiate.

$$a_{ij}(\underline{q})\ddot{q}_j \rightarrow a_{ij}(\underline{q}^e)\ddot{x}_j$$

Pour le second terme, on effectue un développement de Taylor.

$$f_i(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) = f_i(\underline{q}^e, \dot{\underline{q}}) + \frac{\partial f_i}{\partial q_j}(\underline{q}^e, \underline{0})x_j$$

$$f_i(\underline{q}^e, \dot{\underline{q}}) = f_i(\underline{q}^e, \underline{0}) + \frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}_j}(\underline{q}^e, \underline{0})\dot{x}_j$$

$$f_i(\underline{q}^e, \underline{0}) = 0 \quad (\text{équilibre})$$

Ceci conduit, pour chaque équation de Lagrange, à une équation différentielle à coefficients constants.

$$a_{ij}(\underline{q}^e)\ddot{x}_j + \frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}_j}(\underline{q}^e, \underline{0})\dot{x}_j + \frac{\partial f_i}{\partial q_j}(\underline{q}^e, \underline{0})x_j = 0$$

Le système d'équation peut être écrit sous forme matricielle (en renommant les coefficients).

$$m_{ij} \ddot{x}_j + c_{ij} \dot{x}_j + k_{ij} x_j = 0 \quad \underline{\underline{M}} \underline{\underline{X}} + \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\dot{X}}} + \underline{\underline{K}} \underline{\underline{X}} = \underline{0}$$

La solution d'un tel système se recherche sous la forme :

$$x_j = a_j e^{st} \quad \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{A}} e^{st}$$

Qui doit vérifier l'équation caractéristique :

$$\det \left(s^2 \underline{\underline{M}} + s \underline{\underline{C}} + \underline{\underline{K}} \right) = 0$$

Cette équation a $2n$ racines (complexes). A une racine simple correspondent des coefficients a_j constants. Si une racine est double, les coefficients a_j peuvent être des polynômes de degré un. De manière générale, pour les racines multiples, les coefficients a_j sont des polynômes.

Toutes les racines ont une partie réelle strictement négative → stable
 Une racine a une partie réelle strictement positive → instable

Les racines ont une partie réelle négative ou nulle. On regarde celles qui sont à partie réelle nulle.

Si elles sont simple et a constant → stable
 Si une est multiple et a non constant → instable

1.8. Exemples

1.8.1. Barre pendulaire

Une barre est liée à un bâti fixe par une liaison pivot à une de ses extrémités. Elle peut se déplacer dans un plan vertical, et sa position est repérée par son inclinaison sur l'horizontale φ (figure 2.2). Cette barre subit l'effet de la pesanteur.

Ecrire l'énergie cinétique de cette barre en fonction du paramètre φ .

Calculer la force généralisée due à la pesanteur.

Ecrire l'équation de Lagrange

Il y a deux positions d'équilibre, montrer leur stabilité ou instabilité.

Dans le cas de l'équilibre stable, linéariser l'équation de Lagrange pour de petits mouvements.

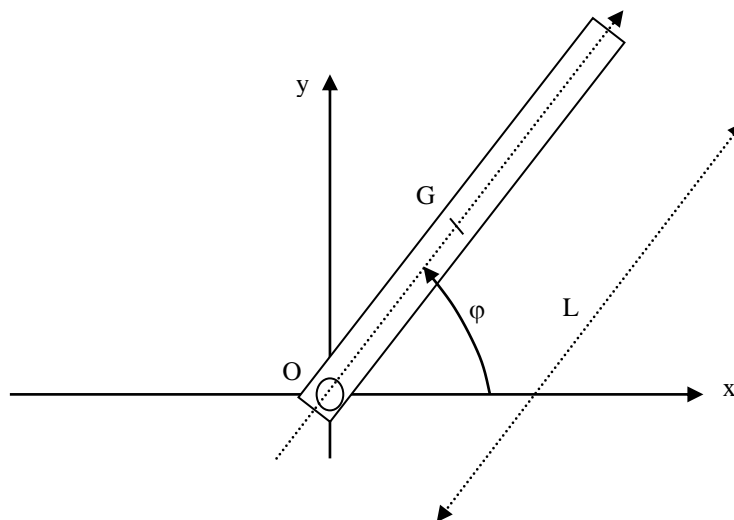


Figure 1.2. Barre liée à un repère fixe par une articulation

1.8.2. Barre pendulaire avec ressort

Une barre est liée à un bâti fixe par une liaison pivot à une de ses extrémités. Elle peut se déplacer dans un plan vertical, et sa position est repérée par son inclinaison sur l'horizontale φ (figure 2.3) ou sa déviation de la verticale θ . Cette barre subit l'effet de la pesanteur et celui d'un ressort de torsion qui oppose un couple à la déviation θ .

$$\{\text{Ressort} \rightarrow \text{barre}\} = \{ \underline{Q}, \underline{M}_o = -K\theta \underline{z} \}$$

Ecrire l'énergie cinétique de cette barre en fonction du paramètre θ .

Calculer les forces généralisées dues à la pesanteur et au ressort.

Ecrire l'équation de Lagrange

Donner la condition sur la raideur pour que l'équilibre soit stable.

Dans le cas de l'équilibre stable, linéariser l'équation de Lagrange pour de petits mouvements

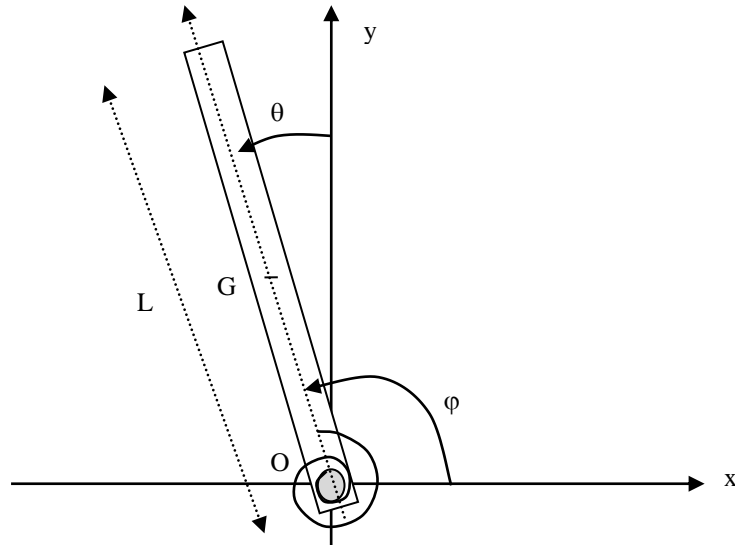


Figure 1.3. Barre liée à un repère fixe par une articulation et un ressort de rappel.

1.8.3. Barre pendulaire sur support mobile

Une barre, décrite précédemment est liée à un plateau mobile ayant un mouvement horizontal $x=f(t)$. Cette barre subit l'effet de la pesanteur et celui d'un ressort de torsion qui oppose un couple à la déviation θ .

Ecrire l'énergie cinétique de cette barre en fonction du paramètre θ .

Calculer les forces généralisées dues à la pesanteur et au ressort.

Ecrire l'équation de Lagrange

Linéariser l'équation de Lagrange pour de petits mouvements

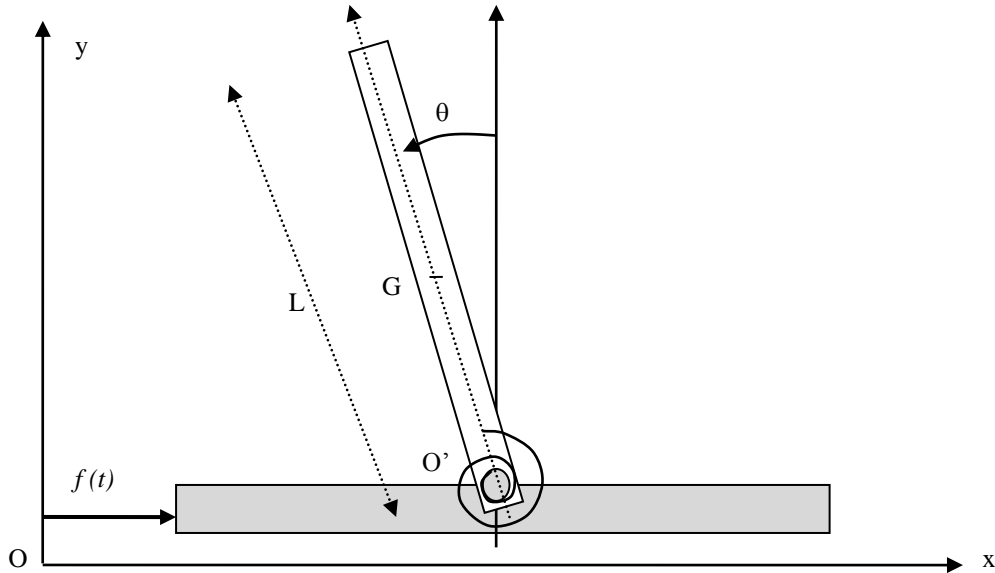


Figure 1.4. Barre liée à une plaque mobile par une articulation et un ressort de rappel.

1.8.4. Double barre pendulaire

Le système est constitué de deux barres de même longueur articulées entre elles avec un ressort de rappel. Une barre est liée à un plateau par une liaison pivot et un ressort de rappel. Les paramètres de position des barres sont les paramètres angulaires θ et ψ . (figure 1.4)

$$\begin{aligned} \{ \text{plateau} \rightarrow \text{barre 1} \} &= \{ \underline{0}, \underline{M}_{o_1} = -K_1 \theta \underline{z} \} \\ \{ \text{barre 1} \rightarrow \text{barre 2} \} &= \{ \underline{0}, \underline{M}_{o_2} = -K_2 (\psi - \theta) \underline{z} \} \end{aligned}$$

Ecrire les vitesses des centres de gravité des deux barres.

Ecrire l'énergie cinétique de l'ensemble des deux barres en fonction des paramètres θ et ψ .

Calculer les forces généralisées dues à la pesanteur et aux ressorts.

Ecrire les équations de Lagrange

Donner la condition sur les raideurs pour que l'équilibre soit stable.

Dans le cas de l'équilibre stable, linéariser les équations de Lagrange pour de petits mouvements

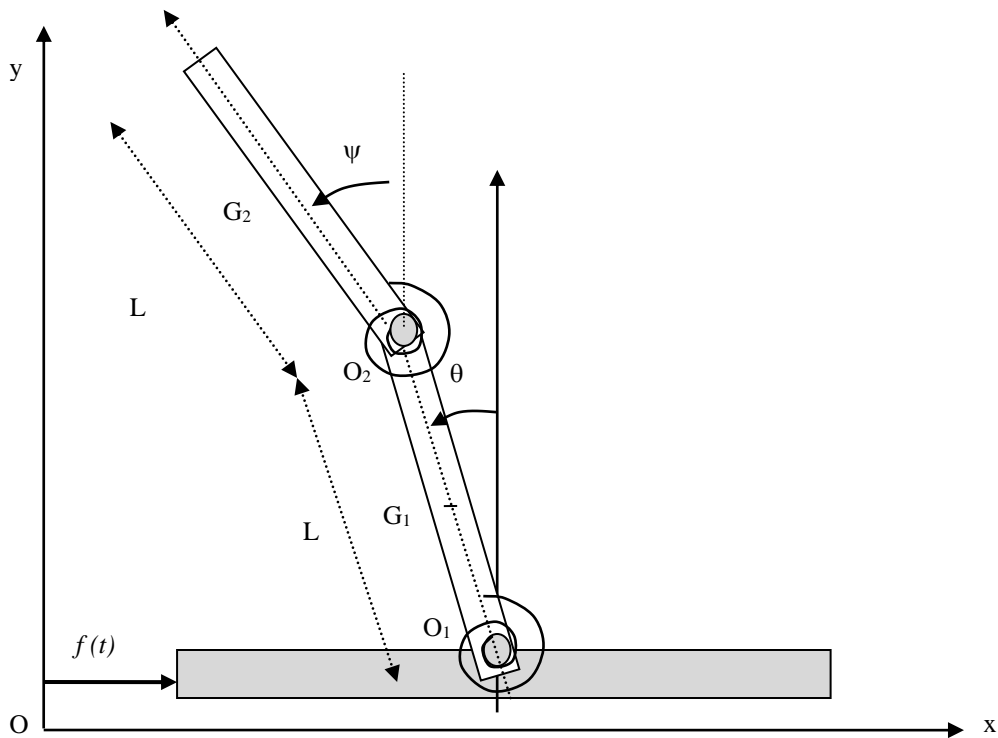


Figure 1.5. Système de deux barres articulées, avec ressorts de rappel, sur un plateau mobile

1.8.5. Régulateur de Watt

Le régulateur de Watt, dont le schéma est présenté sur la figure 1.6, est destiné à réguler la vitesse de rotation d'une machine à vapeur. Celui-ci est composé des éléments suivants :

- un arbre A, avec deux plateaux, dont le moment d'inertie par rapport à l'axe est I ,
- des tiges de longueur L , de masses négligeables,
- des boules B, assimilées à des points matériels de masse m ,
- un ressort R, de raideur K ,
- un manchon M, assimilé à un point matériel de masse M , qui coulisse sur A,
- un amortisseur fluide F.

Toutes les liaisons sont supposées parfaites (sans frottement).

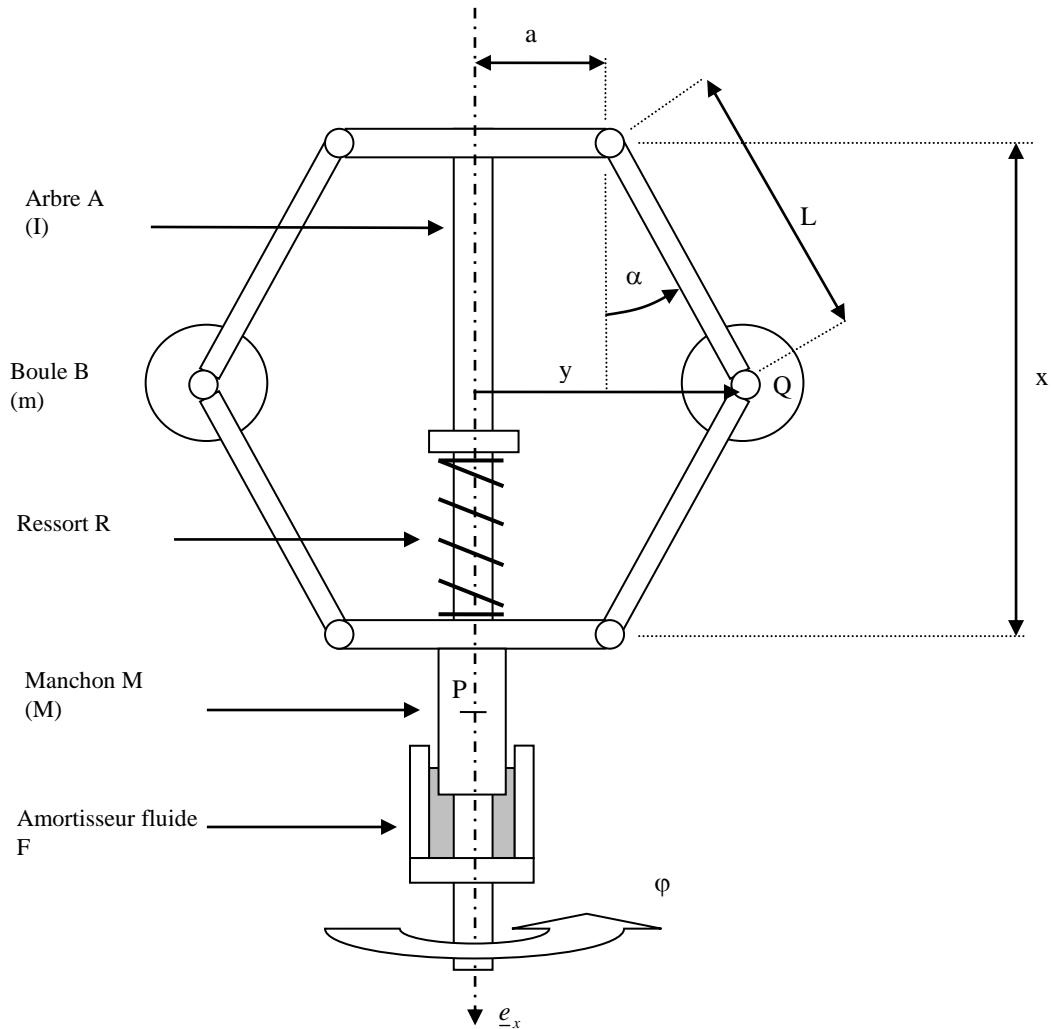


Figure 1.6. Régulateur de Watt

Les efforts, outre l'effet de la pesanteur sur les boules et le manchon sont :

$$\text{le moteur} \quad \{mot \rightarrow A\} = \{ \underline{R}, \underline{M}_o = C(t) \underline{e}_x \},$$

$$\text{le ressort} \quad \{R \rightarrow M\} = \{ -K(x - x_0), \underline{M}_o = \underline{0} \},$$

$$\text{l'amortisseur} \quad \{F \rightarrow M\} = \{ -h \dot{x} \underline{e}_x, \underline{M}_o = \underline{0} \}$$

1. Exprimer le torseur distributeur de vitesse de chaque solide, en retenant comme paramètres de position α et φ .
2. Calculer l'énergie cinétique de l'ensemble mobile par rapport au bâti,
3. Calculer la puissance développée par les efforts intérieurs et extérieurs
4. Ecrire les deux équations de Lagrange du mouvement.
5. Que deviennent les équations dans le cas d'un mouvement stationnaire ?
6. Linéariser les équations pour des petits mouvements autour de l'état stationnaire.

1.8.6. Système linéaire à deux degrés de liberté

Mise en équation à l'aide du principe fondamental

Nous considérons le système mécanique simple formé par deux solides liés par des ressorts et un amortisseur comme l'indique le schéma ci-dessous. Nous prenons comme paramètres de positions les déplacements verticaux relatifs (la position initiale correspond à l'équilibre statique, ce qui permet de ne pas faire apparaître l'action de la pesanteur)

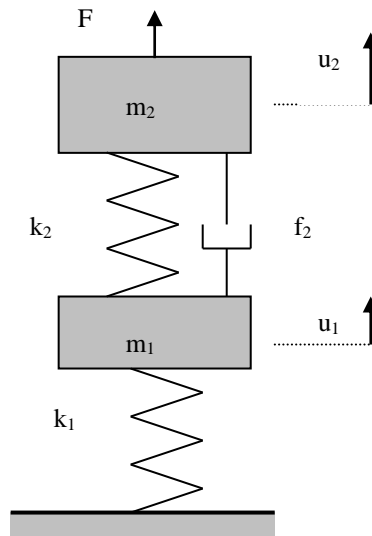


Figure 1.7. Système linéaire à deux degrés de liberté

L'application du principe fondamental conduit à deux équations scalaires qui correspondent, pour chaque solide, à la projection de la résultante sur l'axe vertical.

$$\begin{cases} m_2 \ddot{u}_2 = F - k_2(u_2 - u_1) - f_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) \\ m_1 \ddot{u}_1 = k_2(u_2 - u_1) - k_1 u_1 + f_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) \end{cases}$$

Ce système d'équations peut s'écrire avec les notations matricielles.

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_2 & -f_2 \\ -f_2 & f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mise en équation à l'aide du principe des puissances virtuelles.

Nous reprenons l'exemple précédent. Pour trouver les deux équations du mouvement il faut appliquer le principe en considérant deux champs de vitesses virtuelles différents (linéairement indépendants). Vont nous intéresser les vitesses verticales des masses 1 et 2.

Considérons les deux masses animées d'une même vitesse virtuelle figure 1.8. (a)

$$\Pi_a = m_1 \ddot{u}_1 v + m_2 \ddot{u}_2 v, \quad \Pi_e = F v, \quad \text{et} \quad \Pi_i = -k_1 u_1 v$$

L'écriture du principe, quelle que soit la valeur de v , fournit la première équation :

$$m_1 \ddot{u}_1 + m_2 \ddot{u}_2 + k_1 u_1 = F$$

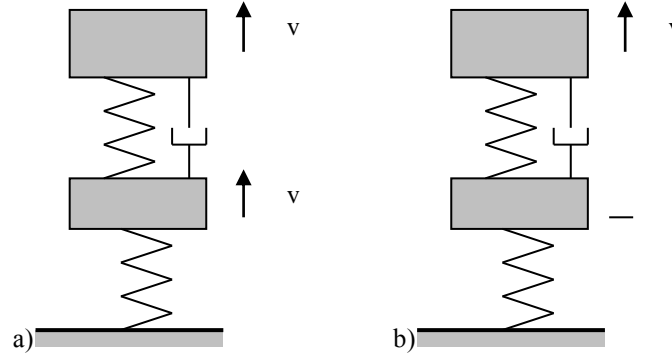


Figure 1.8. Système linéaire à deux degrés de liberté. Deux champs de vitesses virtuelles.

Considérons maintenant la masse 1 fixe et la masse 2 animée d'une vitesse virtuelle non nulle figure 1.8.(b).

$$\Pi_a = m_2 \ddot{u}_2 v, \quad \Pi_e = F v, \quad \text{et} \quad \Pi_i = -k_2 (u_2 - u_1) v - f_2 (\dot{u}_2 - \dot{u}_1) v$$

L'écriture du principe, quelle que soit la valeur de v , fournit la seconde équation :

$$m_2 \ddot{u}_2 = F - k_1 (u_2 - u_1) - f_2 (\dot{u}_2 - \dot{u}_1)$$

Le système d'équations obtenu est équivalent à celui provenant de l'application de la loi fondamentale.

$$\begin{cases} m_1 \ddot{u}_1 + m_2 \ddot{u}_2 = F - k_1 u_1 \\ m_2 \ddot{u}_2 = F - k_2 (u_2 - u_1) - f_2 (\dot{u}_2 - \dot{u}_1) \end{cases}$$

Mise en équation à l'aide des équations de Lagrange.

Nous prenons comme paramètres les allongements des ressorts ($q_1 = u_1$, $q_2 = u_2 - u_1$). L'énergie cinétique et la puissance s'écrivent :

$$K = \frac{1}{2} (m_1 \dot{q}_1^2 + m_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2) \quad \Pi = F(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - k_1 \dot{q}_1 q_1 - k_2 \dot{q}_2 q_2 - f_2 \dot{q}_2$$

Les facteurs de puissance sont :

$$\begin{aligned} Q_1 &= F - k_1 q_1 \\ Q_2 &= F - k_2 q_2 - f_2 \dot{q}_2 \end{aligned}$$

Les équations de Lagrange sont les suivantes :

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) \ddot{q}_1 + m_2 \ddot{q}_2 + k_1 q_1 = F \\ m_1 \ddot{q}_1 + m_2 \ddot{q}_2 + k_2 q_2 + f_2 \dot{q}_2 = F \end{cases}$$

Chapitre 2

Vibration d'un système simple

La modélisation dynamique la plus simple d'un système mécanique est l'oscillateur à un degré de liberté, souvent nommé *SDOF* (Single Degree Of Freedom). La construction de modèles plus complexes s'appuie souvent sur cet élément de base. Nous allons d'abord rappeler les paramètres caractéristiques, et les propriétés du système à un degré de liberté, qui sont utilisés dans le domaine de l'étude des vibrations. Ce modèle peut être utilisé pour approcher le mouvement simplifié d'une structure

2.1. Système linéaire à un degré de liberté

Une structure à un degré de liberté est représentée par un seul paramètre de position $x(t)$ et donc un seul paramètre de chargement $f(t)$. La représentation mathématique d'un tel système, dans le domaine temporel, est une équation différentielle dont chaque terme a une signification physique : la masse m , la raideur k et l'amortisseur c (figure 2.1).

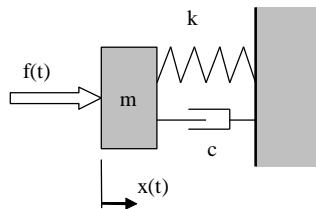


Figure 2.1. Modèle de structure à un degré de liberté

L'équation régissant la réponse mécanique d'une structure à un degré de liberté est :

$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + k x(t) = f(t)$$

Le problème général est de trouver la réponse $x(t)$ lorsque l'on connaît le chargement, ou excitation $f(t)$. L'amortisseur c est source de dissipation d'énergie. En absence d'amortissement le système est dit conservatif. En présence d'amortissement le système est dissipatif.

2.2. Système conservatif

2.2.1. Oscillations libres

En absence d'amortissement et sans force appliquée, l'équation ci-dessous permet de définir la pulsation propre, la fréquence et la période :

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad \text{ou} \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Le mouvement de la masse est donc :

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

Ou, en introduisant l'amplitude X et la phase φ :

$$x(t) = X \cos(\omega_0 t - \varphi) \quad X = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \tan \varphi = \frac{B}{A}$$

Ce déplacement peut être représenté par la projection horizontale d'un vecteur de norme X tournant à la vitesse angulaire ω_0 (figure 2.2.).

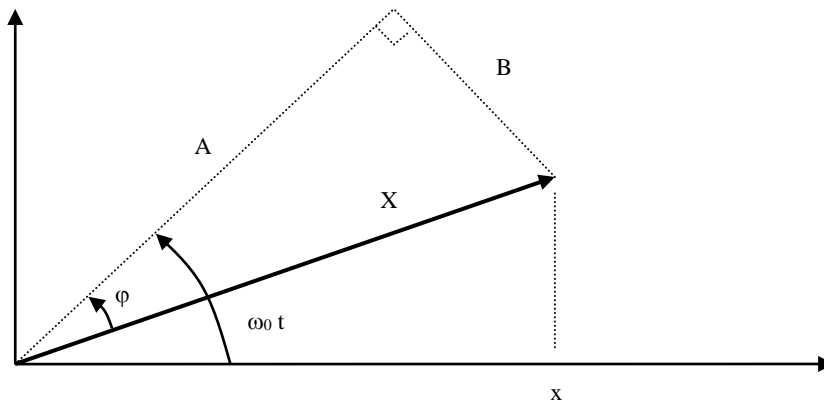


Figure 2.2. Représentation de la réponse libre d'un oscillateur.

Les vitesses et accélérations peuvent utiliser la même représentation. On observe que le vecteur associé à la représentation de la vitesse est en quadrature, et celui de l'accélération est en opposition de phase avec celui du déplacement (figure 2.3.).

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 X \sin(\omega_0 t - \varphi) = -\omega_0 X \cos\left(\omega_0 t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 X \cos(\omega_0 t - \varphi)$$

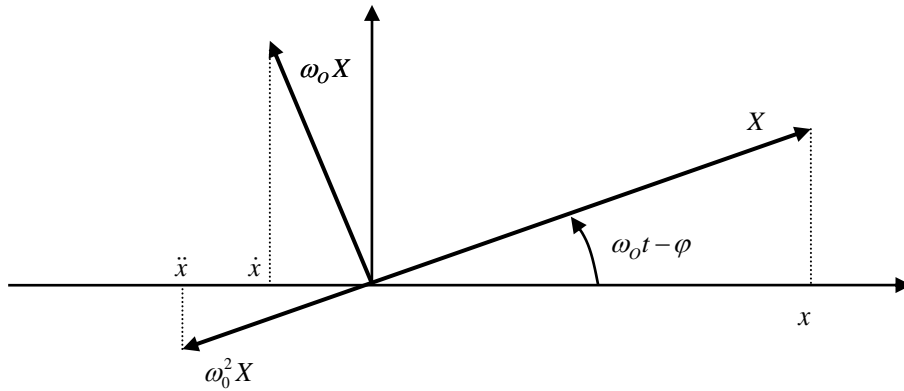


Figure 2.3. Représentation de la réponse en déplacement, vitesse et accélération d'un oscillateur

Si on utilise les notions d'énergie cinétique et d'énergie potentielle, l'équation du mouvement traduit le fait que l'énergie totale est conservée.

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \left(v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} \right) \quad \Psi = \frac{1}{2} k x^2 \quad m v \frac{dv}{dt} + k x \frac{dx}{dt} = 0$$

$$m v dv + k x dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = C^{te} \quad \text{ou} \quad \frac{v^2}{\omega_0^2} + x^2 = R^2$$

On peut représenter le mouvement dans un diagramme de phase par un cercle (figure 2.4.)

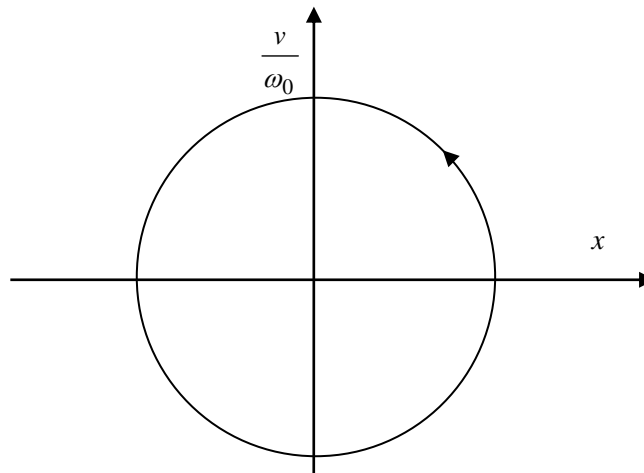


Figure 2.4. Représentation de la trajectoire dans le diagramme de phase

2.2.2. Oscillations forcées

On parle d'oscillations forcées lorsqu'une force extérieure $f(t)$, dite aussi force excitatrice, est appliquée sur la masse.

$$m\ddot{x} + kx = f(t) \quad m\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m} f(t)$$

On peut rechercher les solutions de cette équation comme somme d'une solution particulière et de la solution générale vue précédemment. Un cas intéressant est de regarder la solution particulière dans le cas d'une excitation harmonique.

$$m\ddot{x} + kx = F \cos(\omega t)$$

La solution particulière est de la forme suivante :

$$x(t) = X \cos(\omega t)$$

On définit l'amplification μ comme le rapport de l'amplitude du mouvement au déplacement qui serait observé si la force était appliquée de manière statique.

$$\mu = \frac{X}{X_s} = \left| \frac{1}{1 - \beta^2} \right| \quad X_s = \frac{F}{k} \quad \beta = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Il est à noter que la réponse est mathématiquement indéterminée pour une fréquence d'excitation identique à la fréquence propre. En pratique, lorsque la fréquence d'excitation s'approche de la fréquence propre, il se produit de grands déplacements, et ceux-ci ne peuvent être traduits par une équation sans dissipation.

La réponse à une excitation du système linéaire peut également être recherchée en utilisant la transformation de Laplace.

$$L(x(t)) = \bar{x}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} x(t) dt$$

Dans l'espace opérationnel l'équation du mouvement s'écrit :

$$s^2 \bar{x} + \omega_0^2 \bar{x} = \frac{1}{m} \bar{f}(s) \quad L(x(t)) = \bar{x}(s) \quad L(f(t)) = \bar{f}(s)$$

Cela permet d'exhiber quelques réponses à des chargements particuliers :

Réponses impulsionnelle et indicielle

La réponse impulsionnelle est le déplacement provoqué par un chargement correspondant à l'impulsion de Dirac.

$$f(t) = \delta(t) \quad \bar{f}(s) = 1 \quad \rightarrow \quad \bar{x} = \frac{1}{m(s^2 + \omega_0^2)} \quad x = \frac{1}{m\omega_0} \sin \omega_0 t = \frac{1}{\sqrt{km}} \sin \omega_0 t$$

La quantité \sqrt{km} est nommée impédance. La figure 2.5. représente cette réponse avec des variables ($t^* = \omega_0 t$, $x^* = x\sqrt{km}$).

La réponse indicielle est le déplacement provoqué par un chargement correspondant au créneau, ou la discontinuité, de Heaviside

$$f(t) = H(t) \quad \bar{f}(s) = \frac{1}{s} \quad \rightarrow \quad \bar{x} = \frac{1}{ms(s^2 + \omega_0^2)} \quad x = \frac{1}{m\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t) = \frac{1}{k} (1 - \cos \omega_0 t)$$

La figure 2.5. représente cette réponse avec des variables ($t^* = \omega_0 t$, $x^* = kx$).

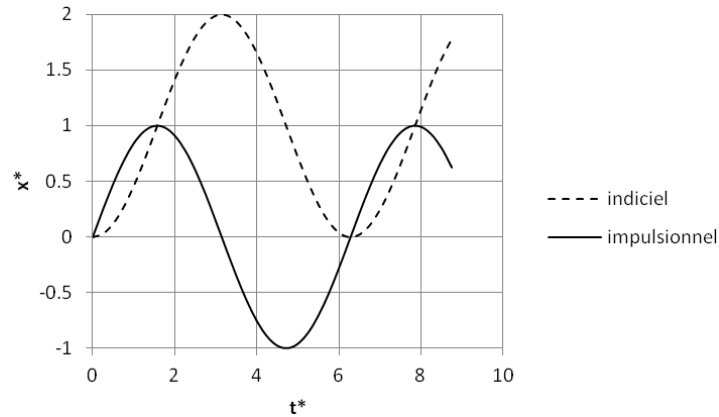


Figure 2.5. Représentation des réponses impulsionnelle et indicielle.

Réponse à un sinus

$$f(t) = F \sin \omega t \quad \bar{f}(s) = \frac{F\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\rightarrow \quad \bar{x} = \frac{F\omega}{m(s^2 + \omega^2)(s^2 + \omega_0^2)} \quad x = \frac{F\omega}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \left(\frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right)$$

Réponse à une impulsion décroissante

$$f(t) = F e^{-\alpha t} \quad \bar{f}(s) = \frac{F}{s + \alpha} \quad \rightarrow$$

$$\bar{x} = \frac{F}{m(s + \alpha)(s^2 + \omega_0^2)} \quad x = \frac{F}{m(\alpha^2 + \omega_0^2)} \left(e^{-\alpha t} + \frac{\alpha \sin \omega_0 t - \omega_0 \cos \omega_0 t}{\omega} \right)$$

De manière générale, la réponse à un chargement, ou force excitatrice, peut s'écrire comme le produit de convolution de ce chargement avec la réponse impulsionnelle. La formule porte le nom d'intégrale de Duhamel.

$$\bar{x} = \frac{\bar{f}}{m(s^2 + \omega_0^2)} \quad \Rightarrow \quad x = f(t) * \frac{1}{m\omega_0} \sin \omega_0 t = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{km}} f(t - \tau) \sin(\omega_0 \tau) d\tau$$

2.3. Système dissipatif

2.3.1. Oscillations libres

Le mouvement libre d'un système linéaire dissipatif est solution de l'équation suivante :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad \text{ou} \quad \ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

On définit les paramètres suivants :

$$2\lambda = \frac{c}{m} \quad \text{et} \quad \eta = \frac{\lambda}{\omega_0} = \frac{c}{2m\omega_0} = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

La forme analytique de la solution dépend de la valeur du paramètre adimensionnel d'amortissement η :

Amortissement sur critique

$$\eta > 1 \quad x(t) = e^{-\lambda t} (A \cosh(\omega_1 t) + B \sinh(\omega_1 t)) \quad \omega_1 = \omega_0 \sqrt{\eta^2 - 1}$$

Amortissement critique

$$\eta = 1 \quad x(t) = e^{-\omega_0 t} (At + B)$$

Amortissement sous critique

$$\eta < 1 \quad x(t) = e^{-\lambda t} (A \cos(\omega_1 t) + B \sin(\omega_1 t)) \quad \omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \eta^2} \quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$$

2.3.2. Expérience de « lâcher »

Une manière d'illustrer la différence entre les trois types d'amortissement est de considérer la réponse à un « lâcher ». On observe le mouvement libre du solide à partir d'une position initiale différente (x_0) de celle de l'équilibre, et sans vitesse initiale. On retrouve les trois formes analytiques selon la valeur de η .

Amortissement sur critique

$$\eta > 1 \quad \frac{x(t)}{x_0} = e^{-\lambda t} \left(\cosh(\omega_1 t) + \frac{\lambda}{\omega_1} \sinh(\omega_1 t) \right) \quad \frac{\dot{x}(t)}{\omega_0 x_0} = -\frac{e^{-\lambda t}}{\sqrt{\eta^2 - 1}} \sinh(\omega_1 t)$$

Amortissement critique

$$\eta = 1 \quad \frac{x(t)}{x_0} = e^{-\omega_0 t} (\omega_0 t + 1) \quad \frac{\dot{x}(t)}{\omega_0 x_0} = -\omega_0 t e^{-\omega_0 t}$$

Amortissement sous critique

$$\eta < 1 \quad \frac{x(t)}{x_0} = e^{-\lambda t} \left(\cos(\omega_1 t) + \frac{\lambda}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) \right) \quad \frac{\dot{x}(t)}{\omega_0 x_0} = -\frac{e^{-\lambda t}}{\sqrt{1 - \eta^2}} \sin(\omega_1 t)$$

La figure 2.6. présente les réponses au lâcher pour différentes valeurs d'amortissement ($t^* = \omega_0 t$, $x^* = x / x_0$). La figure 2.6. donne également le diagramme de phase pour ces expériences ($v^* = \dot{x} / \omega_0 x_0$, $x^* = x / x_0$).

Un cas intéressant, et fréquent, est celui du système très faiblement amorti ($\eta \ll 1$). La figure 2.7. représente la réponse pour $\eta = 0,02$. La courbe est une sinusoïde d'amplitude décroissante. On peut mesurer la période T_1 , peu différente de T_0 . On peut confondre un maximum local de la réponse avec son contact avec la fonction

exponentielle décroissante enveloppe. Dans ces conditions, la mesure du décrément logarithmique permet d'obtenir une estimation du coefficient d'amortissement :

$$\ln\left(\frac{x(t)}{x(t+nT_1)}\right) = n\lambda T_1$$

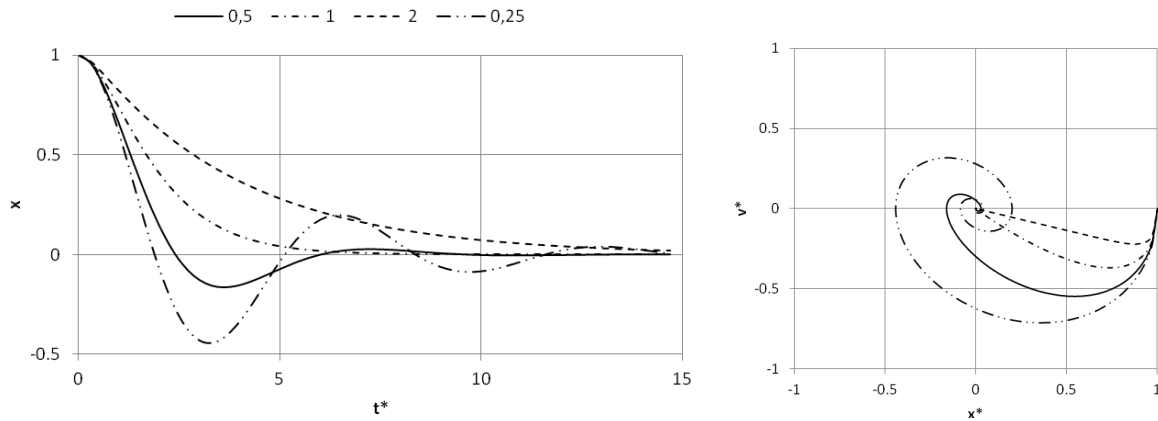


Figure 2.6. Réponse à un lâcher, pour trois valeurs d'amortissements, sur critique 2, critique 1, et sous critique 0,5 et 0,25.

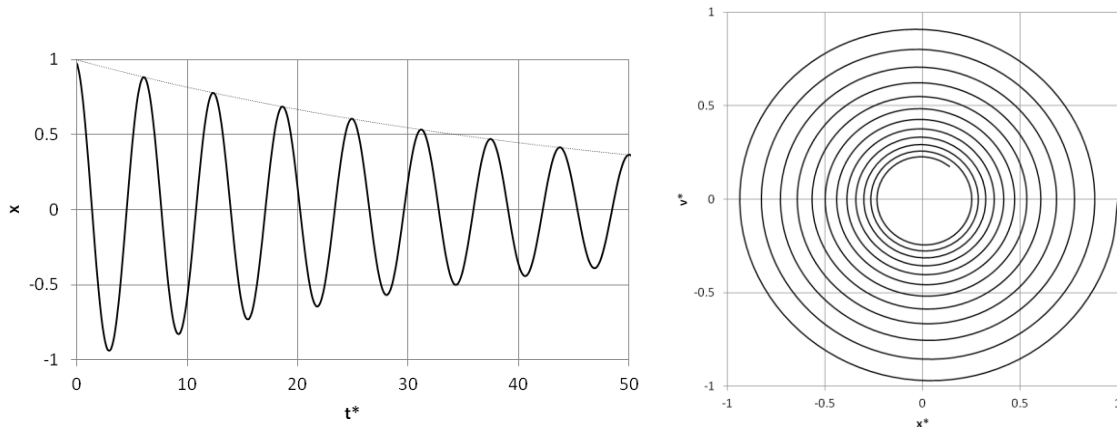


Figure 2.7. Réponse à un lâcher, pour une faible valeur d'amortissement, $\eta=0,02$.

2.3.2. Oscillations forcées

Les oscillations sont forcées lorsqu'une force extérieure excitatrice $f(t)$ est appliquée sur la masse. On peut rechercher les solutions de cette équation comme somme d'une solution particulière et de la solution générale vue précédemment.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

Excitation harmonique

Un cas intéressant est de regarder la solution particulière dans le cas d'une excitation harmonique.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F \cos(\omega t)$$

La solution particulière est de la forme suivante :

$$x(t) = X \cos(\omega t - \varphi)$$

On définit l'amplification relative comme le rapport de l'amplitude maximale de la réponse au déplacement sous force statique.

$$\mu = \frac{X}{X_s} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\eta^2\beta^2}} \quad X_s = \frac{F}{k} \quad \beta = \frac{\omega}{\omega_0}$$

On définit également le déphasage entre l'excitation et la réponse.

$$\tan \varphi = \frac{2\eta\beta}{1 - \beta^2}$$

Les figures 2.8. et 2.9. donnent une représentation de cette amplification et de ce déphasage en fonction de la pulsation, relative, d'excitation.

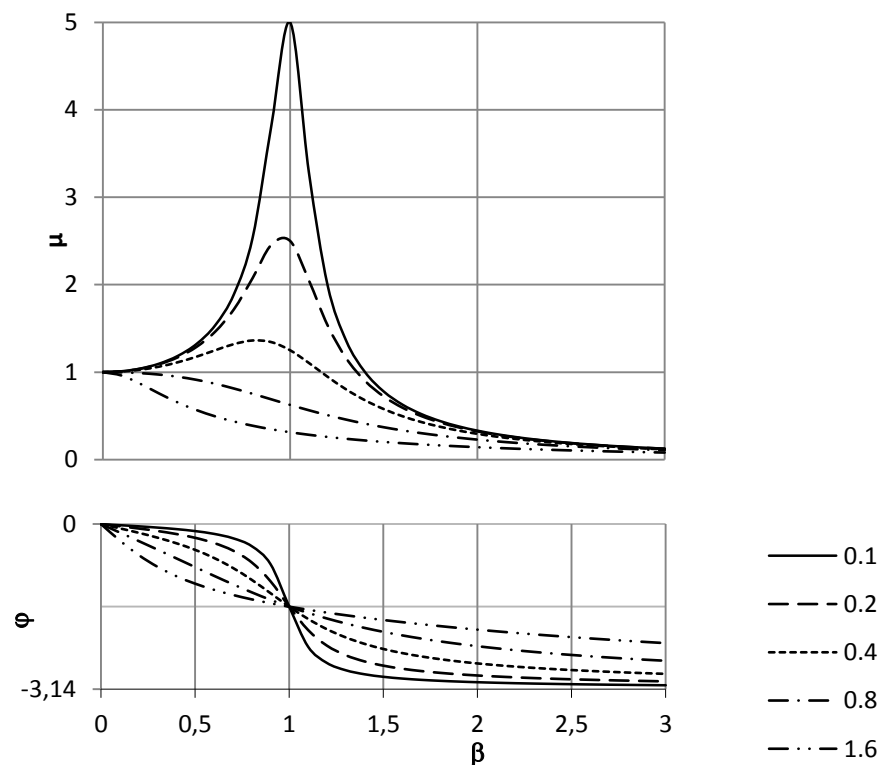


Figure 2.8. Amplification et déphasage en fonction de la pulsation, relative, d'excitation, pour diverses valeurs d'amortissement η .

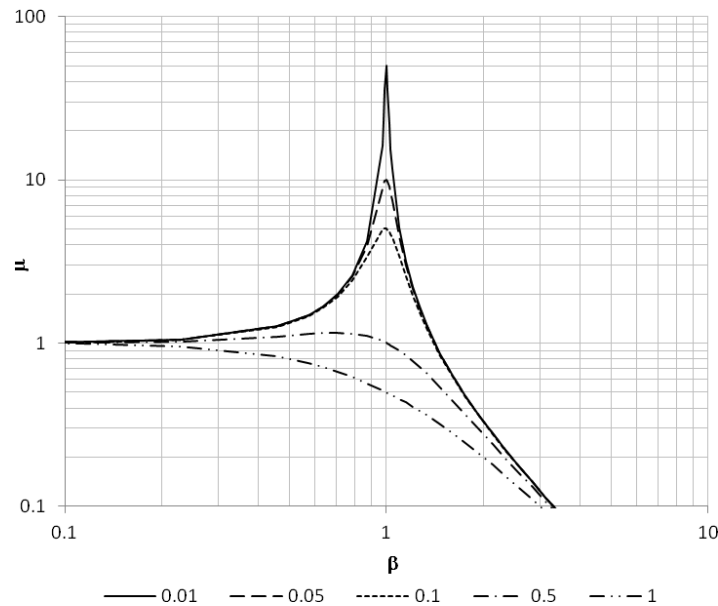


Figure 2.9. Amplification en fonction de la pulsation, relative, d'excitation, pour diverses valeurs d'amortissement η (en échelles logarithmiques).

La solution générale est la somme de la solution particulière et de la solution générale de l'équation sans excitation. Nous avons vu que les mouvements, sans excitation, tendent vers 0 après une phase transitoire. Aussi, si on s'intéresse à la réponse « permanente » de l'oscillateur on ne retient que la solution particulière.

Réponses impulsionnelle et indicielle

On peut expliciter les réponses impulsionnelle et indicielle dans les trois cas d'amortissement.

Amortissement sur critique

$$\eta > 1 \quad x_{\delta}(t) = \frac{e^{-\lambda t}}{m\omega_1} \sinh(\omega_1 t) \quad x_H(t) = \frac{1}{k} \left(1 - e^{-\lambda t} \left(\cosh(\omega_1 t) + \frac{\lambda}{\omega_1} \sinh(\omega_1 t) \right) \right)$$

Amortissement critique

$$\eta = 1 \quad x_{\delta}(t) = \frac{t}{m} e^{-\omega_0 t} \quad x_H(t) = \frac{1}{k} \left(1 - e^{-\omega_0 t} (\omega_0 t + 1) \right)$$

Amortissement sous critique

$$\eta < 1 \quad x_{\delta}(t) = \frac{e^{-\lambda t}}{m\omega_1} \sin(\omega_1 t) \quad x_H(t) = \frac{1}{k} \left(1 - e^{-\lambda t} \left(\cos(\omega_1 t) + \frac{\lambda}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) \right) \right)$$

Ces réponses sont représentées sur la figure 2.10. avec les variables ($t^* = \omega_0 t$, $x^* = x\sqrt{km}$) pour les réponses impulsionnelles et ($t^* = \omega_0 t$, $x^* = kx$) pour les réponses indicielles.

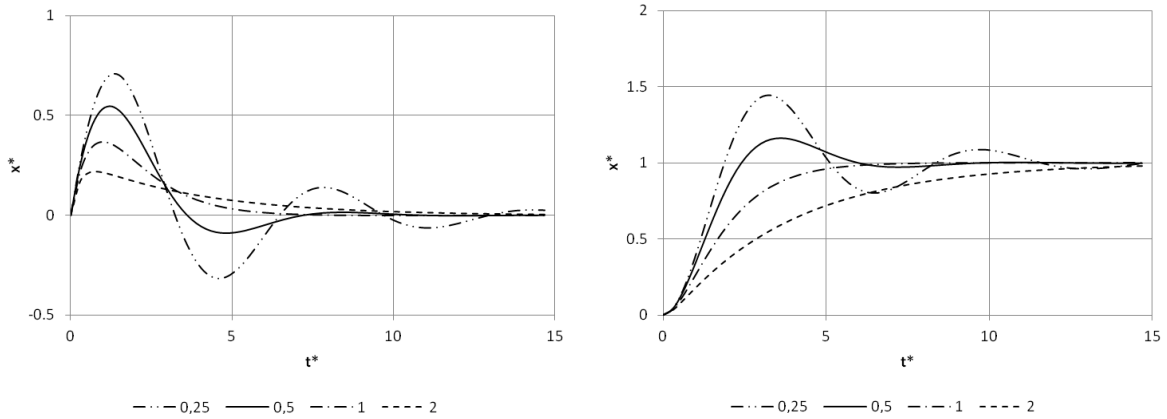


Figure 2.10. Réponse impulsionnelle ($t^* = \omega_0 t, x^* = x\sqrt{kn}$) et réponse indicielle ($t^* = \omega_0 t, x^* = kx$) de l'oscillateur dissipatif pour différentes valeurs d'amortissement.

De manière générale, la réponse à un chargement, ou force excitatrice, peut s'écrire comme le produit de convolution de ce chargement avec la réponse impulsionnelle. La formule porte le nom d'intégrale de Duhamel.

$$x = f(t) * x_{\delta}(t) = \int_0^t f(t - \tau) x_{\delta}(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) x_{\delta}(t - \tau) d\tau$$

2.4. Réponse en fréquence et impédance complexe

La réponse à une excitation harmonique peut donner l'idée de représenter les fonctions chargement et réponse comme les parties réelles de fonctions complexes.

$$\begin{aligned} f(t) &= \text{Re}(f^*(t)) & f^* &= F e^{i\omega t} \\ x(t) &= \text{Re}(x^*(t)) & x^* &= X e^{i(\omega t - \varphi)} \end{aligned}$$

Les amplitudes et phase sont indiquées au paragraphe précédent. Si l'excitation est périodique on peut la décomposer en série de Fourier et procéder par superposition. Dans un cas général on peut utiliser la transformation de Fourier :

$$TF(x(t)) = x^*(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} x(t) dt$$

Une caractéristique de l'oscillateur, utilisée dans le domaine des vibrations, est la fonction de réponse en fréquence. On utilise les transformées de Fourier du chargement et du déplacement, avec leurs propriétés :

$$\begin{aligned} TF(x(t)) &= x^*(\omega) & TF(f(t)) &= f^*(\omega) \\ TF(\dot{x}(t)) &= i\omega x^*(\omega) & TF(\ddot{x}(t)) &= -\omega^2 x^*(\omega) \end{aligned}$$

Compte tenu de ces propriétés de la transformée de Fourier, l'équation différentielle s'écrit alors:

$$(-m\omega^2 + ic\omega + k)x^*(\omega) = f^*(\omega)$$

L'impédance complexe est la quantité :

$$Z^*(\omega) = (k - m\omega^2) + ic\omega$$

On définit la fonction de réponse en fréquence (complexe) comme le rapport, sans dimension, dans le domaine des fréquences, du produit de la réponse par la raideur à l'excitation. Dans l'exemple du système à un degré de liberté cette fonction a l'expression :

$$H^*(\omega) = |H(\omega)| e^{i\varphi(\omega)} = \frac{kx^*(\omega)}{f^*(\omega)} = \frac{k}{k - m\omega^2 + ic\omega}$$

$H^*(\omega)$ a une amplitude $|H(\omega)|$ et une phase $\varphi(\omega)$. Cela signifie qu'une excitation sinusoïdale produit une réponse sinusoïdale de même fréquence. L'amplitude de la réponse est celle de l'excitation multipliée par $|H(\omega)|$ et la réponse est déphasée de $\varphi(\omega)$ par rapport à la sollicitation.

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\eta^2\beta^2}} \quad \tan \varphi = \frac{2\eta\beta}{1 - \beta^2}$$

On peut également écrire la fonction de réponse en fréquence de la façon suivante :

$$H^*(\omega) = \frac{R}{i\omega - p} + \frac{\hat{R}}{i\omega - \hat{p}}$$

D'autres caractéristiques, complexes, de l'oscillateur sont alors définies. p se nomme le pôle, R se nomme le résidu (\hat{p} et \hat{R} sont leurs conjugués). Ces caractéristiques sont liées aux paramètres physiques de l'oscillateur par les relations :

$$\begin{aligned} R &= \frac{-i}{2m\omega_d} & p &= -\sigma + i\omega_d \\ \omega_d^2 &= \omega_0^2 - \sigma^2 & \omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}} & \sigma &= \frac{c}{2m} \end{aligned} \quad [5.6]$$

La figure 2.11 donne la représentation graphique de la fonction de réponse en fréquence. Sont tracés : d'une part, le module en fonction de la pulsation ; d'autre part, le déphasage en fonction de la pulsation. Les caractéristiques de l'oscillateur sont des paramètres de ces courbes (2σ est la largeur du pic à un niveau de -3dB par rapport au maximum).

La fonction de réponse en fréquence peut également être représentée par ses coordonnées dans le plan complexe, il s'agit du diagramme de Nyquist (figure 2.12.)

$$H^*(\omega) = \frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + 4\eta^2\beta^2} \left((1 - \beta^2) - 2i\eta\beta \right)$$

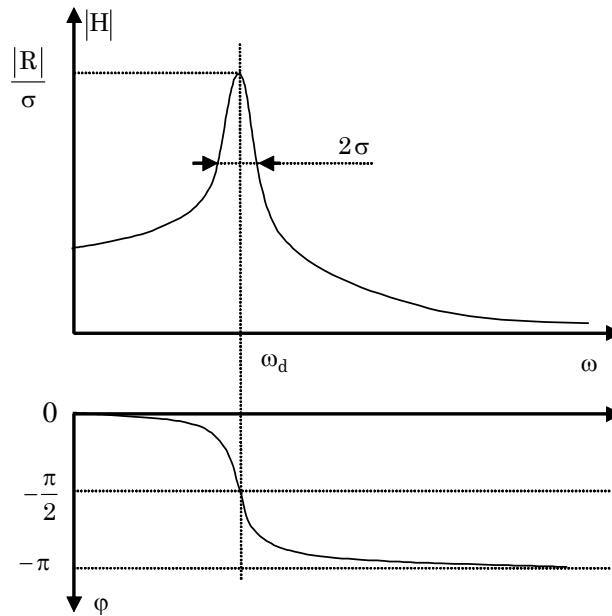


Figure 2.11. Réponse en fréquence d'une structure à un degré de liberté, amplitude et déphasage de la réponse

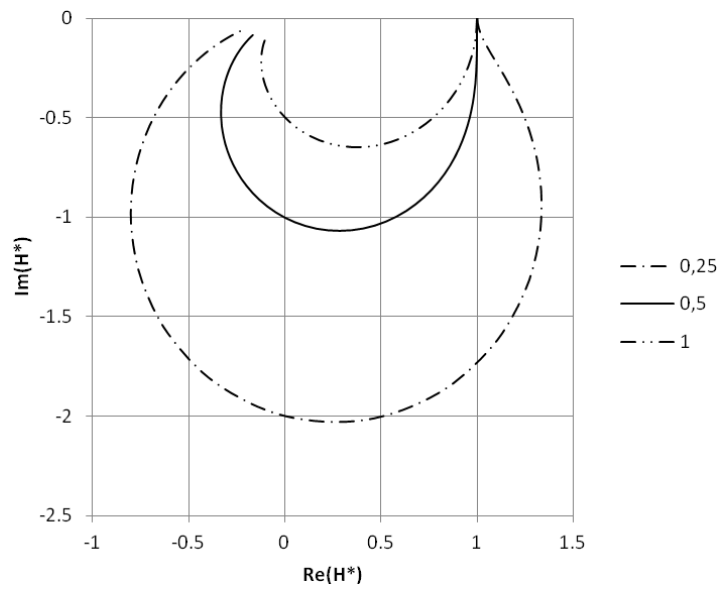


Figure 2.12. Réponse en fréquence dans le diagramme de Nyquist, pour trois valeurs d'amortissement.

2.4. Définition d'un système équivalent pour une structure

2.4.1. Méthode de Rayleigh

Il existe quelques cas où la modélisation d'une structure comme une masse très rigide, liée à une fondation par une liaison ayant une raideur facilement identifiable, est assez évidente. En général, une structure réelle ne se présente pas comme une masse liée à un ressort. Un travail important est la modélisation de la structure et le choix de la masse et la raideur équivalentes. Nous présentons ci-dessous la méthode dite de Rayleigh appliquée à des structures de type poutre en flexion.

De manière générale, une structure (S) est sollicitée par un chargement $Q(x,t)$ qui occasionne des déplacements $\underline{U}(x,t)$. Ces deux quantités sont *a priori* des champs vectoriels. Cette structure a une modélisation mécanique qui permet le calcul des contraintes et des déformations sous chargement statique.

La première étape de la modélisation consiste à choisir des variables scalaires pour représenter le chargement et la réponse mécanique :

- choix d'une grandeur scalaire $F_e(t)$ représentative du chargement ;
- choix d'une grandeur scalaire $X_e(t)$ représentative du déplacement.

Il n'y a pas de restrictions particulières pour effectuer ce choix. On choisit généralement pour F_e la force résultante du chargement, et pour X_e le déplacement le plus grand de la structure. Un calcul statique de mécanique des structures permet de trouver le rapport de cette force à ce déplacement que l'on nomme raideur équivalente:

$$K_e = \frac{F_e}{X_e}$$

La seconde étape consiste à déterminer la masse équivalente à donner au système à un degré de liberté. Ceci repose sur la méthode de Rayleigh pour la détermination approchée des fréquences propres d'une structure. Il faut d'abord faire le choix d'un mode de déplacement. Ce choix peut reposer sur l'intuition et doit vérifier les conditions cinématiques aux limites qui sont imposées à la structure. Il est usuel de prendre comme mode de déplacement la déformée statique ou le premier mode de vibration de la structure, si on le connaît :

$$\underline{U}(x,t) = \psi(t)\underline{\phi}(x)$$

En absence de chargement, on considère les oscillations libres de la structure et la fonction temporelle est harmonique :

$$\psi(t) = e^{i\omega t}$$

Il est alors possible d'estimer l'énergie cinétique de la structure qui oscille selon le mode choisi (l'intégrale se fait sur l'ensemble de la structure) :

$$E_c(t) = \frac{1}{2} \int \rho(x) \underline{\dot{U}}^2(x,t) dv = -\frac{1}{2} \omega^2 e^{2i\omega t} \int \rho(x) \underline{\phi}^2(x) dv$$

Nous pouvons expliciter cette énergie dans le cas où la structure est une poutre en flexion. La poutre considérée est droite (axe x), de longueur L , elle est constituée d'un matériau de module d'élasticité E et de masse volumique ρ . La section de la poutre est S , et le moment quadratique est I . Les déplacements de cette structure correspondent au champ de déplacement transversal de la poutre $U(x,t)$. Ces déplacements sont proportionnels à un mode $\phi(x)$ choisi. L'énergie cinétique est liée aux déplacements transversaux de la poutre . On néglige l'énergie cinétique liée aux rotations des tronçons de poutre :

$$E_c^{\max} = \frac{1}{2} \int_0^L \rho S \dot{U}^2 dx = \frac{\omega^2 \rho S}{2} \int_0^L \phi^2(x) dx$$

Il est, par ailleurs, également possible de déterminer l'énergie de déformation élastique dans cette structure. Cette énergie de déformation élastique sera explicitée à partir d'un calcul sous chargement statique. Dans une poutre, l'énergie de déformation élastique peut s'exprimer en fonction des efforts intérieurs, Mf étant le moment fléchissant, V l'effort tranchant et N l'effort normal (G est le module de cisaillement et S' la section cisailée corrigée) :

$$E_e = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{Mf^2}{EI} + \frac{V^2}{GS'} + \frac{N^2}{ES} \right) dx$$

Les déformations dues à la flexion étant généralement nettement supérieures à celles causées par l'effort normal et l'effort tranchant, il est usuel de ne considérer dans l'expression de l'énergie que le terme dû au moment fléchissant. La poutre étant élastique, le moment fléchissant est proportionnel à sa courbure [5.59] :

$$E_e^{\max} = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{Mf^2}{EI} dx = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad \left(\frac{Mf}{EI} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)$$

Lors des oscillations libres, ces énergies varient en fonction du temps. L'énergie cinétique est maximale au moment où les vitesses sont les plus grandes, c'est-à-dire au moment où la structure passe par la position d'équilibre statique. A ce même instant, l'énergie de déformation élastique est nulle. L'énergie élastique est maximale lorsque l'amplitude de la déformation de la structure est maximale. A cet instant, les vitesses s'annulent et l'énergie cinétique est nulle. Comme la somme des deux énergies reste constante, et que lorsque l'une est maximale, l'autre est nulle, l'énergie élastique maximale est égale à l'énergie cinétique maximale. Ceci permet de trouver une expression de la pulsation propre de la structure oscillant selon le mode choisi :

$$E_e^{\max} = E_c^{\max} \Rightarrow \omega^2 = \frac{EI \int_0^L \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)^2 dx}{\rho S \int_0^L \phi^2 dx}$$

Cette approximation de la pulsation par la méthode de Rayleigh est toujours faite par excès. Le meilleur choix du mode ϕ est celui qui minimise cette valeur. La détermination de la pulsation propre permet de fixer la valeur à donner à la masse équivalente :

$$M_e = \frac{K_e}{\omega^2}$$

2.4.2. Exemple

On s'intéresse au problème d'une poutre qui se déforme en flexion. L'excitation se traduit par une force ponctuelle $F(t)$ appliquée au milieu de la poutre. La poutre est constituée d'un matériau de module d'élasticité E et de masse volumique ρ . La section de la poutre est S , et le moment quadratique est I (figure 2.13).

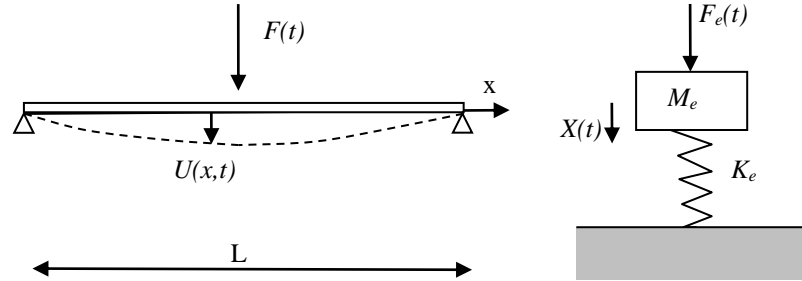


Figure 2.13. Poutre en flexion subissant une excitation en son milieu et système à un degré de liberté équivalent

On cherche à utiliser un système à un degré de liberté pour modéliser la réponse mécanique de cette poutre. Le déplacement transversal de la poutre est $U(x,t)$. Nous choisissons les paramètres pour le modèle. Le déplacement du milieu de la poutre sera la variable caractérisant le déplacement et, dans ce cas, la force équivalente est identique à la force réelle :

$$X_e(t) = U\left(\frac{L}{2}, t\right) \quad F_e(t) = F(t)$$

Avec la théorie des poutres, nous connaissons l'expression du moment fléchissant le long de la poutre et l'équation de la ligne déformée. La structure étant symétrique, le moment fléchissant et la déformée le sont également. La formulation en est donnée sur la demi-poutre [5.62] :

$$Mf(x) = \frac{Fx}{2} \quad U(x) = \frac{F}{EI} \left(\frac{x^3}{12} - \frac{L^2x}{16} \right) \quad x \in \left[0, \frac{L}{2} \right]$$

De ces expressions, on déduit la valeur de la raideur équivalente K_e du système :

$$K_e = \frac{F_e}{X_e} = \frac{F}{U(L/2)} = \frac{48EI}{L^3}$$

Pour le mode de déformation de la poutre, nous allons prendre trois hypothèses, afin de comparer les résultats :

- le mode ϕ_1 est proportionnel à la déformation statique de la poutre ;
- le mode ϕ_2 est premier mode de vibration de la poutre ;
- le mode ϕ_3 est une parabole.

Ces trois modes vérifient les conditions cinématiques imposées aux extrémités de la poutre (le troisième ne vérifie pas la condition dynamique sur appui, car le moment, et donc la courbure, devraient y être nuls) :

$$\phi_1(x) = \frac{L^2x}{4} - \frac{x^3}{3} \quad (x \in [0, L/2])$$

$$\phi_2(x) = \sin \frac{\pi x}{L} \quad \phi_3(x) = x(L-x) \quad (x \in [0, L])$$

Pour le mode ϕ_1 on effectue l'estimation des énergies cinétique et élastique :

$$E_c^{\max} = \omega^2 \rho S \int_0^{L/2} x^2 \left(\frac{x^4}{9} - \frac{x^2 L^2}{6} + \frac{L^4}{16} \right) dx = \frac{37 \omega^2 \rho S L^7}{20160}$$

$$E_e^{\max} = EI \int_0^{L/2} 4x^2 dx = \frac{L^3 EI}{6}$$

On en déduit la pulsation propre associée à ce mode et la masse équivalente M_e qu'il faut attribuer au système équivalent. M est la masse totale de la poutre :

$$\omega^2 = \frac{3360}{37} \frac{EI}{\rho S L^4} = 90,8 \frac{EI}{\rho S L^4} \quad M_e = \frac{37}{70} \rho S L = 0,529 M$$

Pour le mode ϕ_2 on effectue de même l'estimation des énergies cinétique et élastique :

$$E_c^{\max} = \frac{\omega^2 \rho S}{2} \int_0^L \sin^2 \frac{\pi x^2}{L} dx = \frac{\omega^2 \rho S L}{4}$$

$$E_e^{\max} = \frac{EI}{2} \int_0^L \frac{\pi^4}{L^4} \sin^2 \frac{\pi x}{L} dx = \frac{\pi^4 EI}{4L^3}$$

On en déduit la pulsation propre associée à ce mode ϕ_2 et la masse équivalente M_e qu'il faut attribuer au système équivalent :

$$\omega^2 = \frac{\pi^4 EI}{\rho S L^4} = 97 \frac{EI}{\rho S L^4} \quad M_e = \frac{48}{\pi^4} \rho S L = 0,493 M$$

Enfin pour le mode ϕ_3 on effectue encore l'estimation des énergies cinétique et élastique :

$$E_c^{\max} = \frac{\omega^2 \rho S}{2} \int_0^L x^2 (L-x)^2 dx = \frac{\omega^2 \rho S L^5}{60}$$

$$E_e^{\max} = \frac{EI}{2} \int_0^L 4 dx = 2EIL$$

On en déduit la pulsation propre associée à ce mode ϕ_3 et la masse équivalente M_e qu'il faut alors attribuer au système équivalent :

$$\omega^2 = 120 \frac{EI}{\rho S L^4} \quad M_e = \frac{2}{5} \rho S L = 0,4 M$$

Dans ce cas, il est admis que c'est le mode ϕ_1 , proportionnel à la déformée sous chargement statique, qui est la meilleure approximation pour le mode de déformation, car c'est avec celui-ci que l'on obtient la pulsation propre la plus faible. Cette notion d'optimum est à relativiser, car le système à un degré de liberté est déjà une approximation dont nous verrons les limites au chapitre 8. On remarque que même une estimation grossière du mode (ϕ_3) permet une évaluation de l'ordre de grandeur de la pulsation propre.

Chapitre 3

Vibration d'un système à plusieurs degrés de liberté

3.1. Modélisation d'une structure par un système discret

3.1.1. Modèle linéaire de structure

Une structure peut être modélisée par un ensemble de masses concentrées en des points reliés par des éléments déformables. Ce type de modélisation est beaucoup utilisé pour étudier les mouvements de constructions telles que des bâtiments à plusieurs étages. Les méthodes pour calculer la réponse de ces structures à des chargements dynamiques, dont les séismes, ont été largement développées. Pour décrire le mouvement d'une structure à plusieurs degrés de liberté, comportant un nombre n de nœuds repérés par leur numéro i , on définit les paramètres suivants :

m_i : masse concentrée au nœud i ;

x_i : un déplacement du nœud i dans une direction donnée (scalaire) ;

F_i : composante d'une force exercée au nœud i (scalaire) ;

\underline{X} : ensemble des déplacements (vecteur) ;

\underline{F} : ensemble des forces (vecteur).

Un exemple d'une telle structure est représenté par la figure 3.1. La recherche d'équations passe d'abord par une étude de la structure en statique. Une structure a un comportement linéaire s'il existe une application linéaire entre les forces et les déplacements. Ceci se traduit par un système d'équations linéaire :

$$\underline{X} = \underline{A} \underline{F} \quad (x_i = a_{ij} F_j) \quad \underline{F} = \underline{K} \underline{X} \quad (F_i = k_{ij} x_j) \quad \underline{K} = \underline{A}^{-1}$$

Les termes de la matrice A , matrice de souplesse, peuvent se calculer avec une méthode issue de la théorie des milieux curvilignes si la structure est formée de poutres. En choisissant divers chargements unitaires, on peut calculer les déplacements de tous les nœuds qui correspondent aux éléments de la matrice de souplesse (a_{ij} est aussi nommé coefficient d'influence, c'est le déplacement du nœud i pour une force unitaire placée au nœud j). La matrice de raideur est l'inverse de la matrice de souplesse. Le théorème de réciprocité de Maxwell-Betti permet de dire que $a_{ij} = a_{ji}$, et que la matrice est symétrique.

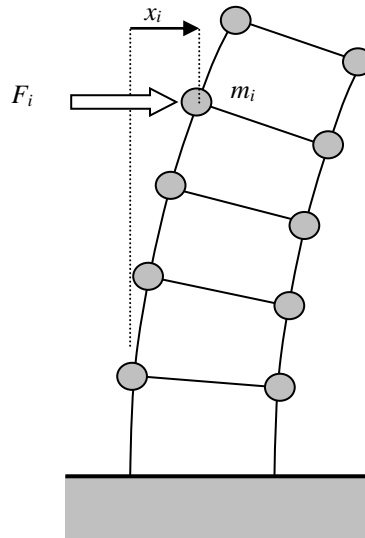


Figure 3.1. *Modèle de structure à plusieurs degrés de liberté.
Repérage des masses, forces et déplacements*

3.1.2. Equations du mouvement

Si l'on étudie les vibrations, les forces sont les forces d'inertie et les forces extérieures. Il apparaît la matrice de masse :

$$F_i = -m_i \ddot{x}_i + F_i^e \quad \underline{F} = -\underline{M} \underline{\ddot{X}} + \underline{F}^e$$

En écrivant le comportement linéaire, on obtient le système d'équations régissant les mouvements de la structure :

$$m_{ij} \ddot{x}_j + k_{ij} x_j = F_i^e \quad \underline{M} \underline{\ddot{X}} + \underline{K} \underline{X} = \underline{F}^e$$

On peut remarquer que l'énergie cinétique et l'énergie de déformation élastique du système s'écrivent sous la forme :

$$E_c = \frac{1}{2} \dot{\underline{X}}^t \underline{M} \dot{\underline{X}} = \frac{1}{2} \dot{x}_i m_{ij} \dot{x}_j \quad E_e = \frac{1}{2} \underline{X}^t \underline{K} \underline{X} = \frac{1}{2} x_i k_{ij} x_j$$

3.2. Système conservatif

3.2.1. Recherche de modes propres

On recherche les modes propres de vibration en considérant les mouvements libres, sans chargement, de la structure. Pour cela, on écrit le déplacement sous la forme :

$$\underline{X} = \psi(t) \underline{\phi}$$

$\underline{\phi}$ est un vecteur modal représentant une déformation propre. Les équations du mouvement prennent la forme suivante :

$$\ddot{\psi} m_{ij} \phi_j + \psi k_{ij} \phi_j = 0 \quad \ddot{\psi} \underline{\underline{M}} \underline{\phi} + \psi \underline{\underline{K}} \underline{\phi} = \underline{0}$$

En multipliant, à gauche, par le vecteur modal, on obtient une équation scalaire :

$$\left(\phi_i m_{ij} \phi_j \right) \ddot{\psi} + \left(\phi_i k_{ij} \phi_j \right) \psi = 0 \quad \left(\underline{\phi}^t \underline{\underline{M}} \underline{\phi} \right) \ddot{\psi} + \left(\underline{\phi}^t \underline{\underline{K}} \underline{\phi} \right) \psi = 0$$

Les coefficients de cette équation sont des formes quadratiques. La séparation des variables conduit à la relation :

$$\omega^2 = - \frac{\ddot{\psi}}{\psi} = \frac{\underline{\phi}^t \underline{\underline{K}} \underline{\phi}}{\underline{\phi}^t \underline{\underline{M}} \underline{\phi}} = \frac{\phi_i k_{ij} \phi_j}{\phi_i m_{ij} \phi_j}$$

Le vecteur modal est défini par :

$$\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}} \right) \underline{\phi} = 0$$

Ce système est non trivial si la matrice est singulière :

$$\det \left(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}} \right) = 0 .$$

Cette équation, dite « équation aux pulsations », est de degré n en ω^2 , les solutions sont appelées les pulsations propres. Un système discret possède autant de fréquences propres que de degrés de liberté. Pour chaque pulsation propre ω_i , on calcule le mode propre $\underline{\phi}^i$. L'ensemble des vecteurs propres forme la matrice modale :

$$\underline{\underline{\Phi}} = \left(\underline{\phi}^1 \dots \underline{\phi}^n \right) \quad \Phi_{ij} = \phi_j^i$$

La solution du système initial peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{X} = \psi_i \underline{\phi}^i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cos(\omega_i t + \theta_i) \underline{\phi}^i$$

Les modes propres sont orthogonaux entre eux par rapport à la matrice de masse et la matrice de raideur, ce qui se traduit par les relations :

$$\begin{cases} \underline{\phi}^i \underline{\underline{M}} \underline{\phi}^j = \phi_p^i m_{pq} \phi_q^j = 0 & \text{si } i \neq j \\ \underline{\phi}^i \underline{\underline{K}} \underline{\phi}^j = \phi_p^i k_{pq} \phi_q^j = 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

En effet, si $\underline{\phi}^i$ et $\underline{\phi}^j$ sont deux modes, ils sont solutions de :

$$\begin{cases} \underline{\underline{K}} \underline{\phi}^i - \omega_i^2 \underline{\underline{M}} \underline{\phi}^i = \underline{0} \\ \underline{\underline{K}} \underline{\phi}^j - \omega_j^2 \underline{\underline{M}} \underline{\phi}^j = \underline{0} \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} \underline{\phi}^j \underline{\underline{K}} \underline{\phi}^i - \omega_i^2 \underline{\phi}^j \underline{\underline{M}} \underline{\phi}^i = 0 \\ \underline{\phi}^i \underline{\underline{K}} \underline{\phi}^j - \omega_j^2 \underline{\phi}^i \underline{\underline{M}} \underline{\phi}^j = 0 \end{cases}$$

Les matrices masse et raideur étant symétriques, la différence des deux équations conduit à :

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) {}^t \underline{\phi}^i \underline{\underline{M}} \underline{\phi}^j = 0$$

On voit donc que si $i \neq j$, on montre :

$$\omega_i \neq \omega_j \quad {}^t \underline{\phi}^i \underline{\underline{M}} \underline{\phi}^j = 0 \quad \text{et} \quad {}^t \underline{\phi}^i \underline{\underline{K}} \underline{\phi}^j = 0$$

Il peut être intéressant d'écrire les équations dans la base propre. On calcule les masses modales et raideurs modales. On peut « normer » les vecteurs modaux de telle sorte que les masses modales soient égales à l'unité :

$${}^t \underline{\phi}^i \underline{\underline{M}} \underline{\phi}^i = \tilde{m}_i \quad \text{et} \quad {}^t \underline{\phi}^i \underline{\underline{K}} \underline{\phi}^i = \tilde{k}_i$$

Ou encore, en utilisant la matrice modale, on définit les matrices de masse et de raideur modales qui sont des matrices diagonales :

$$\underline{\underline{\Phi}}^t \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\Phi}} = \underline{\underline{\tilde{M}}} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\Phi}}^t \underline{\underline{K}} \underline{\underline{\Phi}} = \underline{\underline{\tilde{K}}}$$

Dans la base modale, le système d'équations devient, qui est un système de n équations indépendantes ou découplées :

$$\underline{\underline{\tilde{M}}} \underline{\underline{\tilde{X}}} + \underline{\underline{\tilde{K}}} \underline{\underline{\tilde{X}}} = 0$$

3.2.2. Projection sur base modale

Nous allons maintenant considérer un chargement dynamique sur la structure, représenté par des forces appliquées aux nœuds de la structure. Si le chargement réel ne se présente pas sous cette forme, une pression sur une paroi par exemple, il faudra le modéliser. Le système d'équations contient alors un second membre :

$$m_{ij} \ddot{x}_j + k_{ij} x_j = F_i^e \quad \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\ddot{X}}} + \underline{\underline{K}} \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{F}}^e$$

Les solutions sont recherchées en utilisant les vecteurs modaux :

$$x_i = \psi_k \phi_i^k \quad \underline{\underline{X}} = \psi_k \underline{\underline{\phi}}^k$$

Ce qui conduit au système :

$$m_{ij} \phi_j^k \ddot{\psi}_k + k_{ij} \phi_j^k \psi_k = F_i^e \quad \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{\ddot{\psi}}} + \underline{\underline{K}} \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{\psi}} = \underline{\underline{F}}^e$$

En multipliant, à gauche, par la matrice modale, on obtient :

$$\phi_i^l m_{ij} \phi_j^k \ddot{\psi}_k + \phi_i^l k_{ij} \phi_j^k \psi_k = \phi_i^l F_i^e \quad {}^t \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{\ddot{\psi}}} + {}^t \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{K}} \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{\psi}} = {}^t \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{F}}^e$$

Comme vu au paragraphe précédent, les modes propres sont orthogonaux par rapport aux matrices masses et raideur. Le système est alors formé de n équations indépendantes :

$$\phi_i^k m_{ij} \phi_j^k \ddot{\psi}_k + \phi_i^k k_{ij} \phi_j^k \psi_k = \phi_i^k F_i^e \quad {}^t \underline{\underline{\phi}}^k \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\phi}}^k \underline{\underline{\ddot{\psi}}} + {}^t \underline{\underline{\phi}}^k \underline{\underline{K}} \underline{\underline{\phi}}^k \underline{\underline{\psi}} = {}^t \underline{\underline{\phi}}^k \underline{\underline{F}}^e$$

Dans chaque équation apparaît la pulsation propre du mode considéré et le second membre est la projection du chargement sur le mode :

$$\omega_k^2 = \frac{\phi_i^k k_{ij} \phi_j^k}{\phi_i^k m_{ij} \phi_j^k} = \frac{{}^t \phi^k \underline{\underline{K}} \phi^k}{{}^t \phi^k \underline{\underline{M}} \phi^k} \quad Q_k^e = \frac{\phi_i^k F_i^e}{\phi_i^k m_{ij} \phi_j^k} = \frac{{}^t \phi^k \underline{\underline{F}}^e}{{}^t \phi^k \underline{\underline{M}} \phi^k}$$

Chaque équation modale se formule donc de manière simple :

$$\ddot{\psi}_k + \omega_k^2 \psi_k = Q_k^e$$

La solution peut s'écrire sous la forme :

$$\psi_k(t) = \frac{1}{\omega_k} \int_0^t Q_k^e(\tau) \sin \omega_k(t - \tau) d\tau$$

On obtient la réponse complète en superposant les réponses modales.. Si le chargement peut s'exprimer en tout point par la même fonction de temps, chaque composante modale du chargement utilise cette fonction :

$$\underline{\underline{F}}^e = \underline{\underline{q}} f(t) \quad F_i^e = q_i f(t)$$

$$Q_k^e = \frac{\phi_i^k q_i}{\phi_i^k m_{ij} \phi_j^k} f(t) = \frac{{}^t \phi^k \underline{\underline{q}}}{{}^t \phi^k \underline{\underline{M}} \phi^k} f(t) = q_k f(t)$$

3.2.3. Exemple

Pour illustrer la méthode, nous allons considérer le bâtiment à deux niveaux. La structure porteuse du bâtiment est constituée de portiques formés par des poteaux métalliques encastrés sur une dalle en béton armé. Le caractère répétitif de cette structure de portique, tous les 5 mètres, permet d'aborder ce problème comme l'étude du mouvement d'un portique dans son plan. Ce dernier est alors modélisé par une structure à deux degrés de liberté. Les planchers en béton armé sont considérés comme des éléments massifs et rigides. Les poteaux en acier (HEA) sont les éléments souples et leur masse propre est négligée devant celle des planchers. Les degrés de liberté sont les déplacements horizontaux des planchers. Les calculs de structure en statique ont permis de préciser les raideurs à prendre en compte. Le chargement devra être modélisé par des forces ponctuelles appliquées au niveau des planchers. La figure 3.3 représente le modèle de structure avec ses caractéristiques.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué successivement aux deux masses constituées des planchers fournit les équations :

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_2 (x_2 - x_1) &= F_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) &= F_2 \end{aligned}$$

Ces équations peuvent être mises sous la forme matricielle en introduisant une matrice masse et une matrice raideur :

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

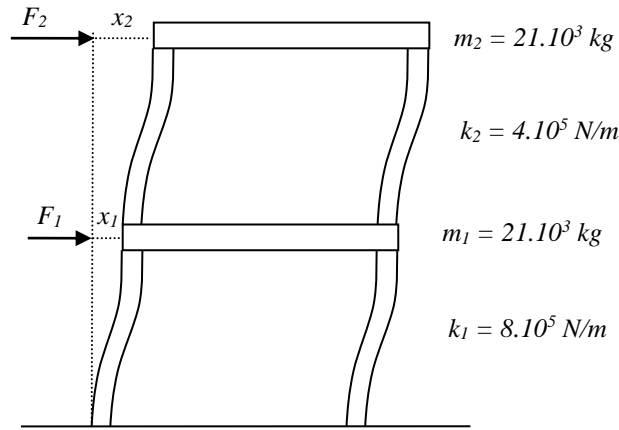


Figure 3.3. Structure de bâtiment modélisée par un système à deux degrés de liberté

Le système est simplifié en considérant $m_1 = m_2, = m, k_1 = 2k$ et $k_2 = k$:

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

Les pulsations propres sont solutions de l'équation :

$$\det(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}) = \begin{vmatrix} 3k - \omega^2 m & -k \\ -k & k - \omega^2 m \end{vmatrix} = m^2 \omega^4 - 4km\omega^2 + 2k^2$$

Les pulsations propres et les périodes propres ont les valeurs :

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= 19(2 - \sqrt{2}) = 11,1 & \omega_1 &= 3,34 \text{ s}^{-1} & t_1 &= 1,88 \text{ s} \\ \omega_2^2 &= 19(2 + \sqrt{2}) = 64,9 & \omega_2 &= 8,05 \text{ s}^{-1} & t_2 &= 0,78 \text{ s} \end{aligned}$$

Les vecteurs propres sont les solutions des systèmes :

$$\begin{aligned} (\underline{\underline{K}} - \omega_1^2 \underline{\underline{M}}) \underline{\phi}^1 &= \begin{pmatrix} 3k - \omega_1^2 m & -k \\ -k & k - \omega_1^2 m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^1 \\ \phi_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2,41\phi_1^1 - \phi_2^1 = 0 \\ (\underline{\underline{K}} - \omega_2^2 \underline{\underline{M}}) \underline{\phi}^2 &= \begin{pmatrix} 3k - \omega_2^2 m & -k \\ -k & k - \omega_2^2 m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^2 \\ \phi_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 0,41\phi_1^2 + \phi_2^2 = 0 \end{aligned}$$

On choisit pour vecteurs propres :

$$\underline{\phi}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2,41 \end{pmatrix} \quad \underline{\phi}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,41 \end{pmatrix}$$

Les formes modales associées à ces vecteurs propres et les pulsations propres sont représentées sur la figure 3.4.

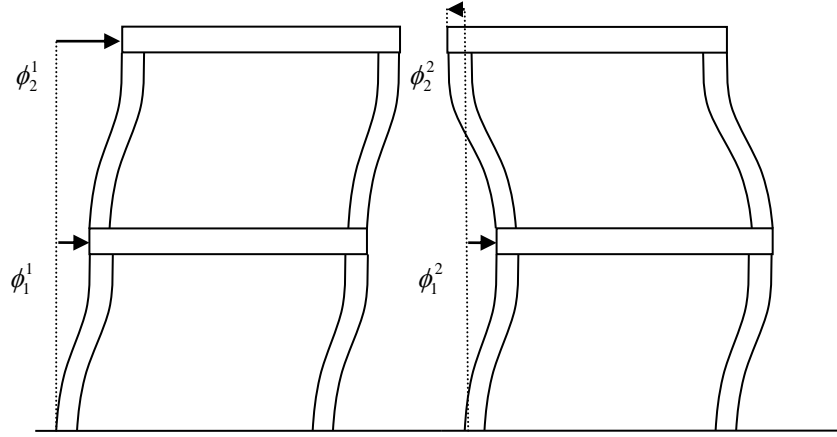


Figure 3.4. Visualisation des deux modes propres de déformations de la structure modélisée par un système à deux degrés de liberté

La solution des équations du mouvement peut s'écrire à partir des solutions du système des équations modales, indépendantes :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \psi_1 \underline{\phi}^1 + \psi_2 \underline{\phi}^2 \quad \begin{cases} \ddot{\psi}_1 + \omega_1^2 \psi_1 = \frac{F_1 + 2,41 F_2}{6,8 m} \\ \ddot{\psi}_2 + \omega_2^2 \psi_2 = \frac{F_1 - 0,41 F_2}{1,2 m} \end{cases}$$

3.3. Système dissipatif

Les équations du mouvement d'un système dissipatif se présentent sous la forme suivante :

$$m_{ij} \ddot{x}_j + c_{ij} \dot{x}_j + k_{ij} x_j = F_i^e \quad \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\ddot{X}}} + \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\dot{X}}} + \underline{\underline{K}} \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{F}}^e$$

On peut rechercher l'écriture des solutions en utilisant les vecteurs modaux du système conservatif associé ($m_{ij} \ddot{x}_j + k_{ij} x_j = 0$) :

$$x_i = \psi_k \phi_i^k \quad \underline{\underline{X}} = \psi_k \underline{\underline{\phi}}^k$$

Ce qui conduit au système :

$$m_{ij} \phi_j^k \ddot{\psi}_k + c_{ij} \phi_j^k \dot{\psi}_k + k_{ij} \phi_j^k \psi_k = F_i^e \quad \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{\ddot{\psi}}} + \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{\dot{\psi}}} + \underline{\underline{K}} \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{\psi}} = \underline{\underline{F}}^e$$

En multipliant, à gauche, par la matrice modale, on obtient :

$$\phi_i^l m_{ij} \phi_j^k \ddot{\psi}_k + \phi_i^l c_{ij} \phi_j^k \dot{\psi}_k + \phi_i^l k_{ij} \phi_j^k \psi_k = \phi_i^l F_i^e \quad {}^t \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{\ddot{\psi}}} + {}^t \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{\dot{\psi}}} + {}^t \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{K}} \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{\psi}} = {}^t \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{F}}^e$$

Comme vu au paragraphe précédent, les modes propres sont orthogonaux par rapport aux matrices masses et raideur. Le système est alors formé de n équations :

$$\begin{aligned} \phi_i^k m_{ij} \phi_j^k \ddot{\psi}_k + \phi_i^l c_{ij} \phi_j^k \dot{\psi}_k + \phi_i^k k_{ij} \phi_j^k \psi_k &= \phi_i^k F_i^e \\ {}^t \underline{\phi}^k \underline{\underline{M}} \underline{\phi}^k \ddot{\psi}_k + \sum_l {}^t \underline{\phi}^k \underline{\underline{C}} \underline{\phi}^l \dot{\psi}_l + {}^t \underline{\phi}^k \underline{\underline{K}} \underline{\phi}^k \psi_k &= {}^t \underline{\phi}^k \underline{\underline{F}}^e \end{aligned}$$

Mais contrairement au cas conservatif, ces équations ne sont pas indépendantes. Il y a des termes de couplages du fait que la matrice C n'est pas nécessairement diagonale dans la base propre du système conservatif. Chaque équation modale se formule donc :

$$\begin{aligned} \ddot{\psi}_k + 2 \sum_l \lambda_{kl} \dot{\psi}_l + \omega_k^2 \psi_k &= Q_k^e \\ \omega_k^2 &= \frac{\phi_i^k k_{ij} \phi_j^k}{\phi_i^k m_{ij} \phi_j^k} = \frac{{}^t \underline{\phi}^k \underline{\underline{K}} \underline{\phi}^k}{{}^t \underline{\phi}^k \underline{\underline{M}} \underline{\phi}^k} & Q_k^e &= \frac{\phi_i^k F_i^e}{\phi_i^k m_{ij} \phi_j^k} = \frac{{}^t \underline{\phi}^k \underline{\underline{F}}^e}{{}^t \underline{\phi}^k \underline{\underline{M}} \underline{\phi}^k} & 2\lambda_{kl} &= \frac{\phi_i^k c_{ij} \phi_j^l}{\phi_i^k m_{ij} \phi_j^k} \end{aligned}$$

Si l'amortissement est faible, et les fréquences propres relativement éloignées les unes des autres, on peut montrer que les termes non diagonaux sont faibles et influencent peu la réponse. On est alors tenté de les supprimer et de faire l'hypothèse que la matrice d'amortissement est diagonale dans la base propre du système conservatif (Hypothèse de Rayleigh et Basile).

$$2\lambda_{kk} = \frac{\phi_i^k c_{ij} \phi_j^k}{\phi_i^k m_{ij} \phi_j^k} \quad (\lambda_{kl} \approx 0 \quad k \neq l)$$

Chaque équation modale est alors indépendante :

$$\ddot{\psi}_k + 2\lambda_{kk} \dot{\psi}_k + \omega_k^2 \psi_k = Q_k^e$$

La solution peut s'écrire sous la forme :

$$\psi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\omega_k^2 - \lambda_{kk}^2}} \int_0^t Q_k^e(\tau) e^{-\lambda_{kk}(t-\tau)} \sin\left(\sqrt{\omega_k^2 - \lambda_{kk}^2}(t-\tau)\right) d\tau$$

On obtient la réponse complète en superposant les réponses modales.

En pratique la détermination de la matrice d'amortissement n'est pas un problème simple. Une manière simple (mathématiquement) d'obtenir une matrice d'amortissement qui sera diagonale dans la base propre du système conservatif est de définir celle-ci comme une combinaison linéaire des matrices masse et raideur.

$$c_{ij} = \alpha m_{ij} + \beta k_{ij} \quad \underline{\underline{C}} = \alpha \underline{\underline{M}} + \beta \underline{\underline{K}}$$

Cependant cette hypothèse n'a pas de fondement physique et peut être en désaccord avec l'observation expérimentale. Il existe des méthodes pour évaluer expérimentalement les coefficients d'amortissement modaux λ_{kk} .

Chapitre 4

Vibration d'une structure continue

4.1. Traction et compression

4.1.1. Equations du mouvement

L'état uniaxial de contrainte est une approximation qui est faite lorsque le solide étudié est de forme élancée (fil ou barre en état de traction ou compression). Le solide est alors représenté géométriquement par une droite, et le champ de déplacement ne dépend que de l'abscisse le long de cette droite (figure 4.1..

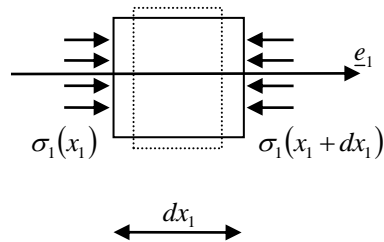


Figure 4.1. *Elément de volume dans un état uniaxial de contrainte*

Les tenseurs de déformation et de contrainte en un point prennent alors une forme simplifiée:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les équations du mouvement prennent la forme du système (en notant, pour alléger les écritures : $x_1 = x$ $\sigma_1 = \sigma$ $\varepsilon_1 = \varepsilon$ $U_1 = U$) :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad \varepsilon = \frac{\partial U}{\partial x} \quad \sigma(\varepsilon)$$

Dans le cas d'un milieu élastique linéaire, l'équation de propagation est :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad C = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

C_0 est la célérité des ondes en état uniaxial de contrainte.

4.1.2. Modes de vibrations

Dans ce paragraphe, le lien est fait entre la représentation des mouvements dans un solide par des ondes et la représentation de ces mouvements par des modes de vibration. Lorsque l'on étudie les vibrations d'une structure mécanique, on peut rechercher une solution de l'équation de mouvement sous la forme :

$$U(x,t) = \psi(t) \phi(x)$$

L'équation du mouvement prend alors la forme :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0$$

$$\phi'' \psi - \frac{1}{C^2} \ddot{\psi} \phi = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\ddot{\psi}}{\psi} = C^2 \frac{\phi''}{\phi} = \text{const} = -\omega^2$$

Alors, on peut rechercher séparément les fonctions d'espace et de temps :

$$\begin{cases} \ddot{\psi} + \omega^2 \psi = 0 \\ \phi'' + \frac{\omega^2}{C^2} \phi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \psi = A \sin \omega t + B \cos \omega t \\ \phi = a \sin \frac{\omega x}{C} + b \cos \frac{\omega x}{C} \end{cases}$$

La fonction d'espace ϕ doit vérifier les conditions aux limites. Nous considérons, par exemple, une barre de longueur L fixée à ses deux extrémités. Les conditions aux limites de la barre sont :

$$\phi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \phi(L) = 0$$

Cela implique les relations :

$$b = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\omega L}{C} = n\pi \quad n \in \mathbb{N}$$

La constante ω ne peut donc prendre que certaines valeurs que l'on nomme pulsations propres, auxquelles sont associées des fonctions d'espace :

$$\omega_n = \frac{n\pi C}{L} \quad n \in \mathbb{N} \quad \phi_n = a \sin \frac{n\pi x}{L}$$

Le mouvement peut donc s'écrire comme la superposition de modes propres :

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(t) \phi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{L} (A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t)$$

4.2. Cordes et câbles

L'équation du mouvement d'une corde ou d'un câble se trouve en considérant l'équation du principe fondamental pour un tronçon de longueur élémentaire, en projection sur la perpendiculaire à l'axe du câble (figure 4.2.).

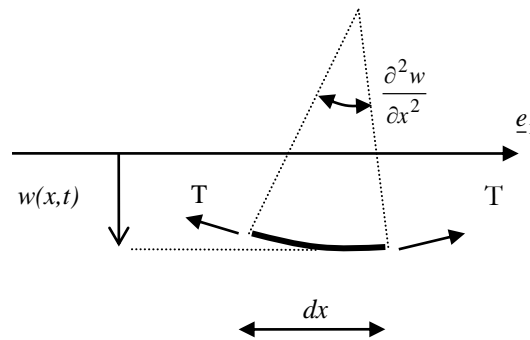


Figure 4.2. Élément de câble tendu

L'équation du mouvement est donc :

$$T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

Ce qui donne une équation identique à celle des ondes de traction compression. La célérité dépend de la tension du câble.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad C = \sqrt{\frac{T}{\rho S}}$$

La détermination des fréquences propres et des modes est donc identique à celle qui a été vue au paragraphe précédent.

4.3. Poutre en flexion

4.3.1. Equation du mouvement

Il existe trois types de modèles de poutre qui se différencient par le choix de la cinématique représentant les déformations. Nous présentons, ci-dessous, le modèle de Bernoulli dans le cadre des poutres droites de section invariante sur la longueur, dans la configuration de problèmes plans. La figure 4.3 représente une poutre déformée. Nous reprenons les notations classiques de la théorie des poutres ou théorie des milieux curvilignes. Une poutre est définie par son axe (x) et une section droite (dans le plan yz) dont les dimensions sont petites devant la longueur et dont le centre est noté G .

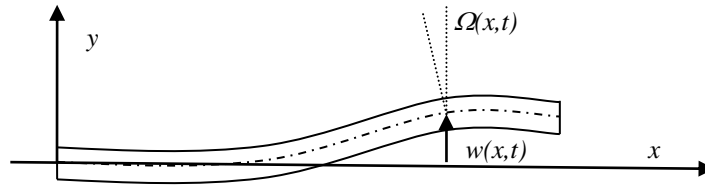


Figure 4.3. Représentation d'une poutre se déformant dans un plan, avec le déplacement transversal w et la rotation d'une section Ω

On notera :

les variables cinématiques :

$w(x,t)$ déformée de la poutre (perpendiculairement à son axe x) ;

$\Omega(x,t)$ rotation d'une section (autour de z) ;

les efforts intérieurs :

$M(x,t)$ moment fléchissant (autour de z) ;

$V(x,t)$ effort tranchant (selon y) ;

les caractéristiques géométriques d'une section :

S section de la poutre (constante) ;

I moment quadratique de la section par rapport à l'axe Gz (constant) ;

les caractéristiques du matériau :

E module de déformation du matériau ;

ρ masse volumique du matériau.

Le modèle de poutre de Bernoulli (ou Euler-Bernoulli) est une restriction du modèle de milieu curviligne en flexion où l'on néglige les distorsions, c'est-à-dire les déformations associées aux efforts tranchants. Cette hypothèse entraîne une grande simplification pour la description des mouvements de poutre, en particulier la rotation d'une section est égale à la pente de la déformée :

$$\Omega = \frac{\partial w}{\partial x}$$

L'erreur commise avec cette hypothèse est négligeable pour les poutres ayant une section « massive » et un grand élancement, ou bien si l'on considère de grandes longueurs d'onde. Avec les hypothèses de la modélisation des milieux curvilignes, les conditions d'équilibre d'un élément unitaire de poutre permettent d'écrire les relations :

$$V(x,t) = -\frac{\partial M}{\partial x} \quad f_y(x,t) = \frac{\partial V}{\partial x}$$

f_y est la densité linéique de force appliquée sur la poutre (dans la direction y). On en déduit donc simplement une équation traduisant l'équilibre :

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}(x,t) - f_y(x,t) = 0$$

Par ailleurs, le comportement élastique du matériau conduit à écrire que le moment fléchissant est proportionnel à la courbure de la poutre :

$$M(x, t) = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Ce qui conduit à l'équation qui régit les déplacements transversaux :

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, t) - f_y(x, t) = 0$$

Si l'on s'intéresse aux vibrations libres, dans ce modèle, les forces mises en jeu sont les seules forces d'inertie associées au mouvement transversal :

$$f_y(x, t) = -\rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

L'équation du mouvement s'écrit alors avec la formulation :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad \text{avec} \quad c^2 = \frac{EI}{\rho S}$$

4.2.2. Modes propres de déformation

Il est possible d'utiliser la méthode de superposition modale pour représenter la réponse mécanique d'une poutre. Cette méthode nécessite, dans un premier temps de calculer les modes propres, de la poutre, et dans un second temps de projeter l'équation du mouvement sur ces modes. Pour trouver les modes propres, on recherche la solution sous la forme $w(x, t) = \phi(x) \psi(t)$. L'introduction dans l'équation aux dérivées partielles permet d'écrire :

$$\frac{EI}{\rho S} \frac{1}{\phi} \frac{d^4 \phi}{dx^4} = -\frac{1}{\psi} \frac{d^2 \psi}{dt^2} = \omega^2$$

Cette opération permet de séparer les variables et d'obtenir deux équations différentielles ordinaires. Pour la fonction de temps, il s'agit de l'équation classique :

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} + \omega^2 \psi = 0 \quad \psi(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

L'équation régissant la fonction d'espace est :

$$\frac{d^4 \phi}{dx^4} - k^4 \phi = 0 \quad k^4 = \omega^2 \frac{\rho S}{EI}$$

Si les répartitions de masse et de raideur sur la poutre sont constantes (poutre de section uniforme), la solution peut s'écrire de la manière suivante :

$$\phi(x) = a \cos kx + b \sin kx + c \cosh kx + d \sinh kx$$

Les constantes doivent être déterminées à l'aide des conditions aux limites. Trois types de conditions se rencontrent à l'extrémité d'une poutre, elles sont indiquées dans le tableau 4.1.

<i>Extrémité encastree</i>	<i>Extrémité articulée ou en appui simple</i>	<i>Extrémité libre</i>
$\phi = 0 \quad \frac{d\phi}{dx} = 0$	$\phi = 0 \quad \frac{d^2\phi}{dx^2} = 0$	$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 0 \quad \frac{d^3\phi}{dx^3} = 0$

Tableau 4.1. Conditions sur la fonction déformée à l'extrémité d'une poutre

Une poutre ayant deux extrémités, les conditions aux limites fournissent quatre équations linéaires liant les quatre constantes. Ce système est non trivial, c'est-à-dire qu'il admet d'autres solutions que la solution nulle, si son déterminant est nul. Ceci fournit « l'équation aux pulsations ». Les solutions de cette équation déterminent une suite infinie de pulsations propres ω_n . Il existe donc une infinité de modes $\phi_n(x)$ auxquels on associe autant de fonctions de temps $\psi_n(t)$:

$$\phi_n(x) = a_n \cos k_n x + b_n \sin k_n x + c_n \cosh k_n x + d_n \sinh k_n x$$

$$\psi_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t \quad \left(k_n^4 = \omega_n^2 \frac{\rho S}{EI} \right)$$

La solution de l'équation des vibrations libres est donc :

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(t) \phi_n(x)$$

Les modes propres sont orthogonaux entre eux au sens des produits scalaires intégrant les répartitions de masse et de raideur. Ceci se voit en projetant l'équation de la variable d'espace pour un mode n sur un autre mode m , puis en projetant l'équation de la variable d'espace pour le mode m sur le mode n :

$$\int_0^L \phi_m EI \frac{d^4 \phi_n}{dx^4} dx - \omega_n^2 \int_0^L \phi_m \rho S \phi_n dx = 0$$

$$\int_0^L \phi_n EI \frac{d^4 \phi_m}{dx^4} dx - \omega_m^2 \int_0^L \phi_n \rho S \phi_m dx = 0$$

La différence des deux équations donne :

$$\int_0^L \phi_m EI \frac{d^4 \phi_n}{dx^4} dx - \int_0^L \phi_n EI \frac{d^4 \phi_m}{dx^4} dx + (\omega_n^2 - \omega_m^2) \int_0^L \phi_m \rho S \phi_n dx = 0$$

$EI \frac{d^4 \phi_n}{dx^4} = f_y^n$ est le chargement qu'il faut imposer à la poutre pour que sa déformée soit le mode n ;

$\int_0^L \phi_m EI \frac{d^4 \phi_n}{dx^4} dx$ représente le travail du chargement n pour les déplacements du mode m ;

$\int_0^L \phi_n EI \frac{d^4 \phi_m}{dx^4} dx$ représente donc le travail du chargement m pour les déplacements du mode n .

Le théorème de réciprocité de Maxwell-Betti permet de dire que la somme des deux premiers termes de l'équation précédente est nulle. On en déduit donc :

$$(\omega_n^2 - \omega_m^2) \int_0^L \phi_n \rho S \phi_m dx = 0$$

Ce qui donne la relation d'orthogonalité :

$$\text{si } n \neq m \quad \int_0^L \phi_n \rho S \phi_m dx = 0$$

Exemple 1, poutre sur deux appuis

Nous considérerons donc une poutre de longueur L dont les modes propres s'écrivent selon l'expression :

$$\phi_n(x) = a_n \cos k_n x + b_n \sin k_n x + c_n \cosh k_n x + d_n \sinh k_n x$$

Les conditions aux limites sont écrites à chaque extrémité :

$$\phi_n(0) = 0 \quad \left(\frac{\partial^2 \phi_n}{\partial x^2} \right)_0 = 0 \quad \phi_n(L) = 0 \quad \left(\frac{\partial^2 \phi_n}{\partial x^2} \right)_L = 0$$

Ces conditions aux limites imposent que la forme des modes est nécessairement :

$$\phi_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}$$

Exemple 2, poutre console

Comme second exemple nous considérons une poutre console, encadrée à sa gauche et libre à son extrémité droite (figure 4.11). La recherche des modes propres est facilitée en posant la fonction d'espace sous la forme :

$$\phi(x) = \alpha(\cos kx + \cosh kx) + \beta(\cos kx - \cosh kx) + \gamma(\sin kx + \sinh kx) + \delta(\sin kx - \sinh kx)$$

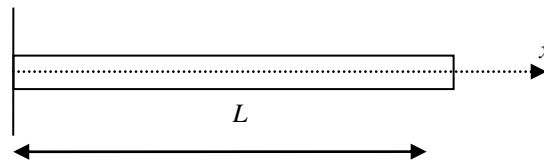


Figure 4.4. Poutre encadrée recevant un chargement transitoire réparti

Les conditions d'encastrement parfait en $x=0$, et d'extrémité libre en $x=L$ s'écrivent :

$$\phi(0) = 0 \quad \left(\frac{d\phi}{dx} \right)_0 = 0 \quad \left(\frac{d^2\phi}{dx^2} \right)_L = 0 \quad \left(\frac{d^3\phi}{dx^3} \right)_L = 0$$

les deux premières conditions imposent : $a = 0$ et $g = 0$;

les deux suivantes se traduisent par le système :

$$\begin{cases} \beta (\cos kL + \cosh kL) + \delta (\sin kL + \sinh kL) = 0 \\ \beta (\cosh kL - \sin kL) + \delta (\cos kL + \cosh kL) = 0 \end{cases}$$

Ce système est non trivial si le déterminant est nul, c'est-à-dire si $z = \cos kL \cosh kL = -1$, que l'on appelle « équation aux pulsations ». Les solutions sont trouvées numériquement. On remarquera que pour les modes d'ordre élevé : $k_n L \approx \pi(n-1/2)$. Ces valeurs permettent de trouver celles de ω_n et on peut écrire les modes sous la forme :

$$\phi_n(x) = \beta_n (\cos k_n x - \cosh k_n x) + \delta_n (\sin k_n x - \sinh k_n x)$$

$$\delta_n = -\beta_n \frac{\cos k_n L + \cosh k_n L}{\sin k_n L + \sinh k_n L}$$

Les paramètres caractéristiques des six premiers modes sont réunis dans le tableau 8.2. Les déformées modales de ces six premiers modes sont représentées sur la figure 8.13 :

n	$\xi_n = \frac{\omega_n}{\omega_1}$	$k_n L$	β_n	δ_n	$\int_0^L \phi_n(x) dx$	$\int_0^L \phi_n^2(x) dx$
1	1	1,8751	1	-0,7341	-0,8335	1,1023
2	6,2667	4,6940	1	-1,018	-0,3879	1,0998
3	17,547	7,8547	1	0,9999	-0,1540	0,9646
4	34,389	10,996	1	-1	-0,2455	0,9842
5	56,842	14,137	1	-1	-0,09864	0,9957
6	84,916	17,279	1	-1	-0,1149	1,0037

Tableau 4.2. Paramètres des six premiers modes propres d'une poutre console

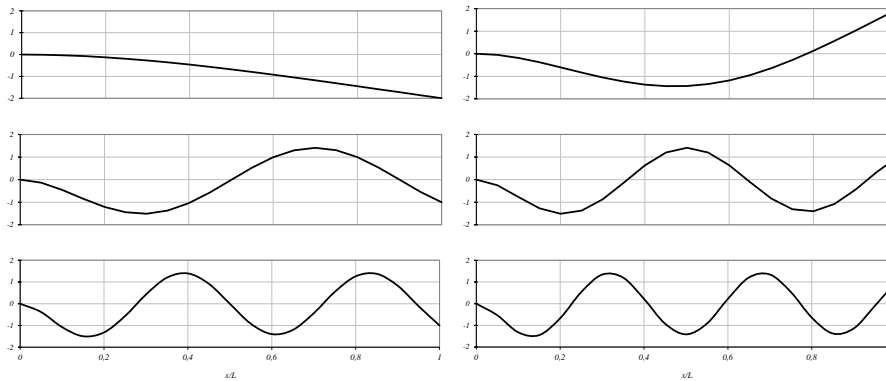


Figure 4.5. Six premiers modes propres de la poutre console

4.2.3. Projection sur base modale

Pour introduire le chargement dans ces équations, il faut le projeter dans la base modale. Il est nécessaire que l'on puisse séparer les variables dans la formulation du chargement transversal sur la poutre :

$$Q(x, t) = p(t) q(x)$$

On cherche à écrire la répartition spatiale de ce chargement sous la forme :

$$q(x) = \sum q_n \phi_n(x)$$

Les coefficients de cette décomposition sont obtenus par projection du chargement sur le mode, en tenant compte de l'orthogonalité des modes propres :

$$\int_0^L \phi_n(x) q(x) dx = \int_0^L \sum_{m=1}^{\infty} q_m \phi_m(x) \phi_n(x) dx = \int_0^L q_n \phi_n^2(x) dx = 0$$

Il s'en déduit la valeur de chaque coefficient q_n :

$$q_n = \frac{\int_0^L \phi_n(x) q(x) dx}{\int_0^L \phi_n^2(x) dx}$$

Dans le cas d'une force ponctuelle $F(t)$ placée en $x = \alpha$ cette expression devient :

$$Q(x,t) = F(t) \delta(x - \alpha) \quad q_n = \frac{\phi_n(\alpha)}{\int_0^L \phi_n^2(x) dx}$$

Chaque équation modale a la forme :

$$\ddot{\psi}_n + \omega_n^2 \psi_n = \frac{q_n}{\rho S} p(t)$$

La fonction $p(t)$ étant connue, on peut résoudre chaque équation modale. On peut, pour cela, utiliser la réponse impulsionnelle :

$$\psi_{n\delta}(t) = \frac{1}{\omega_n} \sin(\omega_n t)$$

La réponse à un chargement imposé peut s'exprimer comme le produit de convolution de ce chargement avec la réponse impulsionnelle (intégrale de Duhamel) :

$$\psi_n(t) = \int_0^t \frac{q_n}{\rho S} \psi_{n\delta}(t - \tau) p(\tau) d\tau$$

On reconstitue ensuite la réponse totale par superposition :

$$w(x,t) = \sum \psi_n(t) \phi_n(x)$$

En pratique, on ne fait la somme que d'un nombre fini de réponses modales, il y a donc une erreur de troncature. Pour choisir le nombre de modes à prendre en compte afin d'obtenir une bonne estimation de la réponse, on peut tenir compte des remarques suivantes :

- il ne faut pas oublier un mode pour lequel le coefficient q_n ne serait pas négligeable ;
- le spectre du chargement a généralement une amplitude significative dans une certaine plage de fréquences ; ce sont les modes dont la fréquence est dans cette plage qui seront importants pour la réponse.