

**INSA Centre Val de Loire
ERE/ IQ
Campus de Bourges**

**EXERCICES
MAITRISE STATISTIQUE DES PROCESSUS**

Par Frédéric KRATZ
Professeur à l'INSA – Centre Val de Loire/ PRISME

Partie 1

Exercice 1

Le temps de réponse d'un système informatique distribué est une caractéristique importante de qualité. Le gestionnaire du système veut savoir si le temps de réponse moyen à un type de commande spécifique dépasse 75 millisecondes. Il sait par expérience que l'écart-type du temps de réponse est de 8 millisecondes.

La commande est exécutée 25 fois et le temps de réponse de chaque essai est enregistré. Nous supposons que ces observations peuvent être considérées comme un échantillon aléatoire des temps de réponse. Le temps de réponse moyen de l'échantillon est $\bar{x} = 79.25$ ms.

Peut-on en conclure que les essais vérifient les hypothèses du gestionnaire du système. Utilisez une erreur de type I de $\alpha = 0,05$.

Exercice 2

Réexaminons le scénario du temps de réponse de l'ordinateur de l'exercice 1. Puisque $\bar{x} = 79.25$ ms, nous savons qu'une estimation ponctuelle raisonnable du temps de réponse moyen est $\hat{\mu} = \bar{x} = 79.25$ ms. Trouvez l'intervalle de confiance bilatéral à 95 % du temps de réponse de la commande.

Exercice 3

Le caoutchouc peut être ajouté à l'asphalte (bitume) pour réduire le bruit de la route lorsque le matériau est utilisé comme revêtement. Le tableau ci-dessous montre la viscosité stabilisée (cP : centipoise) de 15 échantillons de matériau de revêtement en asphalte. Pour être adaptée à l'application de revêtement prévue, la viscosité stabilisée moyenne doit être égale à 3200. Tester cette hypothèse en utilisant $\alpha = 0.05$. Sur la base de l'expérience, nous sommes disposés à supposer dans un premier temps que la viscosité stabilisée est normalement distribuée.

Echantillon	Viscosité stabilisée	Echantillon	Viscosité stabilisée
1	3193	9	3182
2	3124	10	3227
3	3153	11	3256
4	3145	12	3332
5	3093	13	3204
6	3466	14	3282
7	3355	15	3170
8	2979		

Exercice 4

Le contenu moyen des boîtes de café remplies sur une chaîne de production particulière est en cours d'étude. Les normes spécifient que le contenu moyen doit être de 16,0 oz, et l'expérience passée a montré que l'écart type du contenu des boîtes est de 0,1 oz. Les hypothèses sont les suivantes :

$$H_0: \mu = 16,0$$

$$H_1: \mu \neq 16,0$$

Un échantillon aléatoire de neuf boîtes de conserve doit être utilisé, et la probabilité d'erreur de type I est spécifiée comme $\alpha = 0,05$. Par conséquent, la statistique du test est :

$$Z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

et H_0 est rejeté si $|Z_0| = Z_{\alpha/2}$. Trouver la probabilité d'erreur de type II et la puissance du test, si les contenus moyens réels sont $\mu_1 = 16,1$ oz.

1 oz est une unité utilisée aux USA et est équivalent à 29,573 ml.

Partie 2

Exercice 1

Tracer l'histogramme de l'exemple diapo 54.

Exercice 2

Le tableau ci-dessous présente l'épaisseur d'une couche métallique sur 100 tranches de silicium résultant d'un procédé de dépôt chimique en phase vapeur (CVD) dans une usine de semi-conducteurs. Construisez un histogramme pour ces données.

Épaisseur de la couche (Å) sur les plaquettes de semi-conducteurs

438	450	487	451	452	441	444	461	432	471
413	450	430	437	465	444	471	453	431	458
444	450	446	444	466	458	471	452	455	445
468	459	450	453	473	454	458	438	447	463
445	466	456	434	471	437	459	445	454	423
472	470	433	454	464	443	449	435	435	451
474	457	455	448	478	465	462	454	425	440
454	441	459	435	446	435	460	428	449	442
455	450	423	432	459	444	445	454	449	441
449	445	455	441	464	457	437	434	452	439

Un **ångström** (Å) vaut 0,1 nanomètre, soit 10^{-10} mètre.

Note : Afin de réduire le temps de calcul, le nombre d'échantillons donnés a été réduit dans les problèmes suivants. En pratique, un minimum de 25 échantillons serait nécessaire.

Exercice 3

Supposons que nous ayons un processus tel que les limites inférieure et supérieure des spécifications soient de 100 et 150, et que la moyenne du processus et l'écart-type soient respectivement de 140 et 5,0.

Calculer la capacité du procédé C_p et l'Indicateur de dérèglement C_{pk} .

Exercice 4

Dans un certain processus de production, des boutons en titane étaient produits. Toutes les 15 minutes, des échantillons de quatre boutons étaient prélevés et des mesures de dureté (DPN) étaient effectuées sur chaque bouton. Les données relatives à 25 échantillons sont présentées dans le tableau ci-dessous.

1	125,8	128,4	129,0	121,0
2	125,2	127,0	130,4	124,6
3	121,8	126,8	127,2	129,8
4	131,0	130,0	127,2	127,0
5	128,6	122,8	125,4	126,4
6	122,0	123,8	131,2	121,8
7	122,9	129,3	126,2	128,8
8	120,2	130,0	125,6	144,0
9	124,8	123,7	130,2	128,8
10	127,0	126,4	122,2	129,0
11	131,8	127,6	123,8	123,2
12	129,8	125,6	128,2	127,6
13	127,6	125,6	128,2	126,8
14	124,2	122,8	124,8	124,6
15	125,4	129,4	123,6	127,2
16	130,8	122,8	125,4	126,2
17	127,4	131,0	123,0	122,8
18	124,8	122,6	122,8	123,6
19	123,8	130,0	128,4	130,0
20	128,8	141,2	138,8	136,2
21	126,4	123,8	128,8	129,6
22	130,8	127,4	126,0	125,2
23	129,6	128,4	123,2	125,8
24	124,4	127,0	130,0	122,8
25	129,2	126,2	128,0	123,2

Nous allons commencer par une analyse des données :

- Calculer la moyenne \bar{x} et l'étendue R de chaque échantillon
- Calculer la moyenne des moyennes $\bar{\bar{X}}$ et la moyenne des étendues \bar{R}
- Sur 2 graphes différents, tracer en fonction du numéro de l'échantillon, la moyenne \bar{x} et l'étendue R . Conclusion
- Quelle(s) action(s) proposez-vous ?

Calculer la capacité du procédé Cp et l'Indicateur de dérèglement Cpk, en prenant comme limite de tolérance, 110 et 146.

Reprendre le calcul de la capacité du procédé Cp et l'Indicateur de dérèglement Cpk, mais après avoir supprimé les deux échantillons suspects trouvés précédemment.

Exercice 5

Les résultats de 12 échantillons de taille 8 de la mesure du diamètre extérieur de tubes de verre utilisés dans la production de bouteilles sont donnés dans le tableau ci-dessous. Les échantillons sont prélevés toutes les 40 minutes du processus. La cible de la production est 6,20 mm avec une tolérance de $\pm 0,15$ mm Calculer la capabilité du processus.

N° échantillon	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	6,23	6,29	6,19	6,24	6,20	6,31	6,19	6,25	6,27	6,25	6,20	6,28
	6,23	6,21	6,25	6,20	6,20	6,29	6,27	6,14	6,23	6,20	6,22	6,22
	6,20	6,17	6,18	6,19	6,21	6,19	6,16	6,23	6,25	6,21	6,12	6,24
taille	6,26	6,27	6,27	6,23	6,32	6,23	6,21	6,24	6,22	6,29	6,25	6,23
	6,29	6,27	6,20	6,19	6,17	6,19	6,14	6,25	6,27	6,18	6,23	6,13
	6,27	6,14	6,25	6,28	6,21	6,33	6,26	6,17	6,26	6,15	6,12	6,19
	6,28	6,24	6,22	6,08	6,13	6,26	6,30	6,16	6,28	6,29	6,17	6,27
	6,11	6,29	6,19	6,34	6,19	6,27	6,19	6,22	6,17	6,21	6,23	6,25

Exercice 6

Des échantillons de n = 100 prélevés toutes les heures dans un processus ont donné le nombre de défauts par échantillon indiqué dans le tableau ci-dessous. Le procédé est-il sous contrôle ?

0	1	2	0	3	4	1	4	2	3
1	0	1	2	3	1	4	3	0	1
2	1	4	1	1	1	2	3	1	5
0	0	2	5	2	7	2	0	1	2
2	2	1	3	5	6	1	1	2	3

Exercice 7

La pression d'un réservoir d'eau servant au refroidissement d'un procédé est surveillée d'une manière continue. La pression X est enregistrée sur du papier graphique enroulé sur un cylindre circulaire. Périodiquement, le papier graphique circulaire est changé et les données sont placées en fichier. Personne ne savait quoi faire avec ces données. Un stagiaire qui venait de suivre un cours sur le contrôle statistique des procédés décida de construire une carte \bar{X} et R. Le tableau présente les valeurs des 5 premières heures à chaque jour couvrant la période du 1^{er} décembre au 13 janvier.

date	pression X	date	pression X
1 déc.	60 59 54 57 58	17 déc.	55 55 55 52 58
2 déc.	60 59 56 63 59	18 déc.	58 66 60 62 61
3 déc.	61 55 56 61 58	21 déc.	70 69 70 70 70
4 déc.	63 60 57 59 61	22 déc.	70 70 70 61 71
7 déc.	57 58 54 59 61	4 janv.	55 51 44 53 58
8 déc.	56 58 51 59 61	5 janv.	52 58 48 49 52
9 déc.	58 50 51 52 66	6 janv.	44 46 51 46 46
10 déc.	58 53 52 58 56	7 janv.	57 58 46 46 56
11 déc.	56 62 53 59 60	8 janv.	59 65 52 56 52
14 déc.	57 58 58 58 60	11 janv.	62 57 56 60 58
15 déc.	64 64 53 54 60	12 janv.	58 53 43 43 62
16 déc.	64 61 66 48 51	13 janv.	52 63 48 54 54

- (a) Tracez 2 graphiques : celui de la moyenne quotidienne \bar{X} et celui de l'étendue R. Pouvez vous interpréter la variabilité (contrôle / non contrôle) des points ?
- (b) Le stagiaire décide de prendre les données des 12 premiers jours pour calculer les limites de contrôle des cartes \bar{X} et R et placer toutes les données (24 jours) sur les cartes. Interpréter les cartes.
- (c) Refaire (b) mais employer toutes les données pour calculer les limites de contrôle. Interpréter les cartes.
- (d) Comparer l'interprétation (a) avec celle de (c).

Exercice 8

Les données recueillies pour établir une carte de contrôle \bar{X} et R basée sur 35 échantillons de taille $n = 7$ ont donné :

$$\Sigma \bar{X} = 7805 \text{ et } \Sigma R = 1200$$

- (a) Calculez les limites de contrôle pour la carte \bar{X} et celle de R.
- (b) Si on fait l'hypothèse que les deux cartes sont en état de contrôle statistique, quelle serait la moyenne du procédé ainsi que son écart-type ?
- (c) Si on assume que la caractéristique qualité du procédé est normalement distribuée, quelle serait la proportion estimée des unités non conformes si les tolérances sont 230 ± 35 ?
- (d) Si on suppose que la valeur de l'écart type ne change pas mais qu'il est possible d'ajuster le procédé à la valeur nominale visée, qu'elle serait la réduction obtenue de la fraction des unités non conformes ?

Exercice 9

Un produit liquide est fabriqué en lot (« batch »). Puisque chaque lot est logiquement homogène, chaque lot est caractérisé par une seule valeur de test. Les 15 dernières observations (jours) sont dans l'ordre : 35, 39, 38, 42, 37, 37, 39, 37, 37, 40, 39, 39, 38, 42, 36

- (a) Tracez une carte X-MR. Interpréter la carte.
- (b) Les 2 prochaines observations (jour 16 et jour 17) sont 34 et 44. Est-ce que ces valeurs sont en contrôle si on les compare aux 15 premières ?

Exercice 10

Les taux de gravure au plasma suivants ont été mesurés sur chacune des deux plaquettes d'un lot :

Wafer 1	Wafer 2
17,7	20
18,4	19,8
19,8	16,2
15,9	16,6

18,5	16
18,2	18,8
18	17,9
20,3	16,1
17,9	18,3
18,7	20,2
18,2	20,5
18,1	16,6
17	19,5
17,6	18,9
21	17,1
17,7	17
18,9	20,8
17,1	15,9
16,8	18,3
17,6	18,8

- (a) Calculer les limites de contrôle du taux de gravure sur la base de ces données ; utiliser une carte X-S.
 (b) Utilisez les données fournies pour tracer une carte S.

CONSTANTES employées dans les cartes de Shewhart

n	A₂	A₃	B₃	B₄	D₃	D₄	d₂	c₄	d₃
2	1.880	2.659	0	3.267	0	3.268	1.128	0.798	0.853
3	1.023	1.954	0	2.568	0	2.574	1.693	0.886	0.888
4	0.729	1.628	0	2.226	0	2.282	2.059	0.921	0.880
5	0.577	1.427	0	2.089	0	2.114	2.326	0.940	0.864
6	0.483	1.287	0.300	1.970	0	2.096	2.534	0.952	0.848
7	0.419	1.182	0.118	1.882	0.076	1.924	2.704	0.959	0.833
8	0.373	1.099	0.185	1.815	0.136	1.864	2.847	0.965	0.820
9	0.337	1.032	0.239	1.761	0.184	1.816	2.970	0.969	0.808
10	0.308	0.975	0.284	1.716	0.223	1.777	3.078	0.973	0.797

Exercice 11

Le tableau ci-dessous indique le nombre d'unités non conformes trouvées lors de l'inspection d'une série de 15 lots consécutifs de rondelles galvanisées pour des non-conformités de finition telles que l'acier exposé, la galvanisation grossière. Les lots étaient presque de la même taille et un échantillon constant de $n = 400$ a été utilisé. Construire la carte p correspondante.

Lot	Taille échantillon	Nombre d'unités non conformes	Lot	Taille échantillon	Nombre d'unités non conformes
1	400	1	9	400	8
2	400	3	10	400	5
3	400	0	11	400	2
4	400	7	12	400	0
5	400	2	13	400	1
6	400	0	14	400	0
7	400	1	15	400	3
8	400	0			

Exercice 12

Twenty die on each wafer are visually inspected at wafer sort for signs of passivation damage, and the number of die failing the inspection criterion is used for process control. A die can only pass or fail-no other measurement of the amount of "badness" is made. To gather data for determining control limits, 360 die on 18 wafers were inspected; results are shown in table below.

- Choose the chart
- Construct the chart
- Mark the action lines.

Wafer Number	Good Die	Bad Die	Wafer Number	Good Die	Bad Die
1	19	1	11	19	1
4	17	3	12	19	1
3	16	4	13	17	3
4	17	3	14	19	1
5	19	1	15	17	3
6	9	11	16	12	8
7	15	5	17	14	6
8	20	0	18	20	0
9	17	3			
10	20	0	Total	306	54

Exercice 13

On observe des imperfections de type trou d'épingle à la surface d'un acier. À chaque heure, une surface de 300 cm² est inspectée et on compte le nombre d'imperfection qui excèdent une aire de 0.001 cm². Les 20 premières observations sont :

0 0 2 3 2 1 0 1 1 2 1 4 3 2 0 1 4 2 0 1

- Est-ce que ces données satisfont les hypothèses d'un modèle de Poisson ?
- Calculez une carte de contrôle de type C pour le nombre d'imperfections.
- Calculez une carte XmR.
- Est-ce que ces deux cartes proposent des interprétations différentes des données ?

Exercice 14

The following Table gives inspection results in terms of nonconformities observed in the inspection of 25 consecutive lots of burlap bags. Since the number of bags in each lot differed slightly, a constant sample size, $n= 10$ was used. All nonconformities were counted although two or more nonconformities of the same or different kinds occurred on the same bag.

- a) Construct the control chart for u .
- b) Mark the action lines.

Echantillon	Proportion de non-conformité	Echantillon	Proportion de non-conformité
1	1,7	14	1,1
2	1,4	15	1,8
3	0,6	16	1,3
4	2,3	17	2,2
5	0,5	18	0,6
6	0,7	19	2,3
7	1,0	20	2,2
8	1,9	21	0,9
9	2,9	22	1,5
10	1,8	23	2,0
11	2,5	24	0,6
12	0,5	25	2,4
13	0,8		

Partie 3

Exercice 1

Un processus automatique est considéré comme étant en fonctionnement standard si le nombre de défectueux est de l'ordre de 5% de la production. Des échantillons de taille $n = 100$ sont pris toutes les demi-heures.

- d) Calculer les limites supérieures et inférieures de surveillance et de contrôle de ce processus.
- e) Calculez l'ARL du processus sous-contrôle
- f) Calculez l'ARL lorsque la moyenne de défectueux du processus change à :
 - (i) 10 % de défectueux
 - (ii) 8 % de défectueux
 - (iii) 6 % de défectueux

Exercice 2

Sur un processus de mise en conserve, de poids nominal de 1 kg, 25 échantillons de taille $n = 4$ sont prélevés toutes les demi-heures du processus et ont donné les moyennes et les étendues des échantillons figurant dans le tableau ci-dessous.

Sample No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Sample average (\bar{X})	1.003	1.007	1.005	1.005	0.998	0.988	1.001	0.999	1.004	0.992
Sample range (w)	0.016	0.028	0.014	0.035	0.018	0.028	0.022	0.010	0.027	0.041
Sample No.	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Sample average (\bar{X})	0.995	0.998	1.002	1.000	0.998	0.994	1.008	1.002	1.001	0.999
Sample range (w)	0.020	0.016	0.009	0.005	0.025	0.008	0.024	0.002	0.018	0.008
Sample No.	21	22	23	24	25					
Sample average (\bar{X})	1.003	0.998	1.006	1.000	1.002					
Sample range (w)	0.025	0.017	0.031	0.021	0.028					

Considérons l'A.R.L. nécessaire pour détecter les changements suivants dans la moyenne du processus :

- (i) La moyenne du processus passe à 1,010 kg.
- (ii) La moyenne du processus passe à 1,005 kg.
- (iii) La moyenne du processus passe à 1,002 kg.

Exercice 3

Les concentrations dans un bain sont mesurées toutes les heures dans un processus chimique. Les données (en ppm) des 32 dernières heures sont indiquées dans le tableau suivant ((lecture par colonne de gauche à droite) :

160	186	190	206
158	195	189	210
150	179	185	216
151	184	182	212
153	175	181	211
154	192	180	202
158	186	183	205
162	197	186	197

L'objectif du processus est $\mu_0 = 175$ ppm. L'écart-type du processus est de 5,63 ppm.

Construire un tableau CUSUM pour ce processus en utilisant les valeurs normalisées de $h = 5$ et $k = 1/2$.

Exercice 4

Les données du tableau ci-dessous représentent des observations individuelles sur le poids moléculaire prises toutes les heures d'un processus chimique. La valeur cible de la masse moléculaire est de 1 050 et l'écart-type du procédé est estimé à environ $\sigma = 25$.

Observation Number	x	Observation Number	x
1	1,045	11	1,139
2	1,055	12	1,169
3	1,037	13	1,151
4	1,064	14	1,128
5	1,095	15	1,238
6	1,008	16	1,125
7	1,050	17	1,163
8	1,087	18	1,188
9	1,125	19	1,146
10	1,146	20	1,167

c) Tracer la carte EWMA avec $r = 0,1$.