Exemple 1 :

1) $f(x) = ke^{x}$

$k \in \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = ke^{x}$

ainsi f satisfait l'equation $f'(x) = f(x)$
à savoir $(E) : f' = f$

2) $x \longmapsto e^{x}$ est solution de (E)

$x \longmapsto \pi e^{x}$ ———————

$x \longmapsto -3e^{x}$ ———————.

Ex 2 :

$$U = U_C = U_R = -Ri$$
$$= -RC \frac{dU}{dt}$$

ainsi

U est solution de

$$\boxed{U + RC \frac{dU}{dt} = 0}$$

$$\boxed{\frac{dU}{dt} + \frac{1}{RC} U = 0}$$ car $RC \neq 0$

Ex 3/ Ex 4

$$f'(x)f(x) + 2x f''(x) + e^x = 0$$

Notat° maths :

$$f'f + 2x f'' + e^x = 0$$ (on a omis d'écrire $f(x)$)

avec la lettre y cela nous donne

$$y'y + 2xy'' + e^x = 0$$

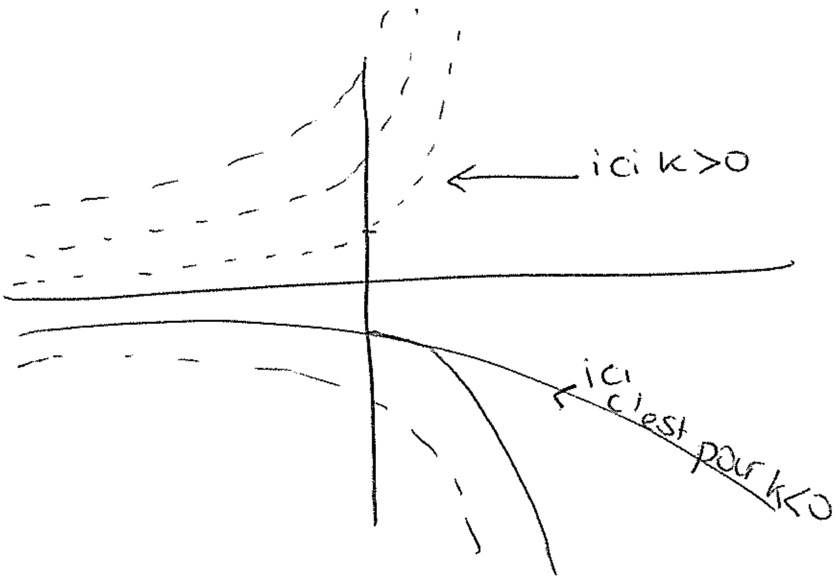
Notat° méca : variable : t
la fonction : x

$$\dot{x}(t)\,x(t) + 2t\,\ddot{x}(t) + e^t = 0$$

Notat° φ :

$$\frac{dU}{dt} \cdot U + 2t \frac{d^2U}{dt^2} + e^t = 0$$

Ex 5 : Allure des courbes $x \longmapsto ke^x$



Ex 6 :

1) $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 3x = 5$

. variable : t

. fonction : $x(t)$

. Equat° non linéaire : à cause du $\frac{dx}{dt} \times \frac{dx}{dt}$

2) $e^{x} y^{(5)} + (\ln x)\, y = \frac{2x}{x+3}$

variable : x

fonction : y

$e^{x} y^{(5)} + \ln(xy) = \frac{2x}{x+3}$

2 a) linéaire

b) non linéaire $\ln(xy)$

3) $x \ddot{x} + t^2 x = 3$

variable : t

fonction : x

non linéaire : $x \ddot{x}$

4) $2y'' - 3y' = y$

variable : non exprimée

fonction : y

Linéaire.

Ex 8 :

$$a_2(x)\, y''(x) + a_1(x)\, y_1'(x) + a_0(x)\, y = 0$$

$$a_2(x) y''(x) + a_1(x)\, y_1'(x) + a_0(x)\, y = d_1(x) \quad (E_1)$$

$$a_2(x) y''(x) + a_1(x)\, y_1'(x) + a_0(x)\, y = d_2(x) \quad (E_2)$$

$$a_2(x)\, y''(x) + a_1(x)\, y_1'(x) + a_0(x)\, y = d_1(x) + d_2(x) \quad (E_3)$$

f_1 est solution de (E_1)
donc

$$\left.\begin{array}{l} a_2(x) f_1'' + a_1(x) f_1' + a_0(x) f_1 = d_1 \ (*) \\ \\ f_2 \text{ ——————— de } (E_2) \\ \text{donc} \\ a_2(x) f_2'' + a_1(x) f_2' + a_0(x) f_2 = d_2 \ (**) \end{array}\right\}$$

alors par somme de $(*)$ et $(**)$ nous obtenons

$$a_2(x) f_1'' + a_2(x) f_2'' + a_1(x)\, f_1' + a_1(x)\, f_2' + a_0(x)\, f_1 + a_0(x)\, f_2 = d_1 + d_2$$

$$\Leftrightarrow \quad a_2(x)\, (f_1 + f_2)'' + a_1(x)\, (f_1 + f_2)' + a_0(x)\, (f_1 + f_2) = d_1 + d_2$$

Démonstration :

$$y' + ay = 0 \quad (H)$$

- $x \longmapsto Ke^{-ax}$ est solution de (H)

en effet $\quad f(x) = Ke^{-ax}$

$\qquad f'(x) = -aKe^{-ax}$

ainsi $\quad f'(x) + a f(x) = -aKe^{-ax} + aKe^{-ax} = 0$

- Soit maintenant f une solution de (H)

$x \in \mathbb{R}$, f satisfait donc (H) à savoir $y' + ay = 0. \Rightarrow \boxed{f'(x) + af(x) = 0}$

posons $\quad g(x) = f(x)e^{ax}$

$\qquad g'(x) = \underbrace{f'(x)}e^{ax} + f(x)\,a\,e^{ax}$

or $\qquad \underbrace{f'(x)} = \underbrace{-af(x)}$

ainsi en remplaçant nous obtenons

$$g'(x) = -ae^{ax}f(x) + f(x)\,ae^{ax}$$
$$= 0$$

$\Rightarrow g$ fonction constante notée k

$\underline{\forall x \in \mathbb{R}}$ $\quad \left.\begin{array}{l} g(x) = k \\ \text{or } g(x) = f(x)e^{ax} \end{array}\right\}$

donc $f(x)e^{ax} = k$

$\underline{f(x) = ke^{-ax}}$

- Ainsi $x \longmapsto ke^{-ax}$ est solution

$\rightarrow$ Si f est solution elle est de la forme $x \longmapsto ke^{-ax}$

Ex 9 :

$$2y' - 3y = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad y' - \frac{3}{2}y = 0$$

$$a = -3/2$$

$$S_H = \{ x \longmapsto k e^{-ax}, k \in \mathbb{R} \}$$
$$= \{ x \longmapsto k e^{3/2 x}, k \in \mathbb{R} \}$$

Ex 10 :

1) Se Ramener à 1 Equation Normalisée

$$y' + 3/2\, y = x + \frac{1}{2} \quad (N)$$

2) S_H

3) Recherche d'1 solut° particulière

$P(x) = x + 1/2$ $\deg P = 1$

$\Rightarrow$ on cherche donc 1 solution sous la forme d'1 polynôme de m̃ degré

$$Q(x) = ax + b \qquad Q'(x) = a$$

Q solution de (N)

$$\Leftrightarrow \quad a + 3/2\,(ax + b) = x + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3/2\, ax + (a + 3/2\, b) = x + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3/2\, a = 1 \\ a + 3/2\, b = 1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2/3 \\ 3/2\, b = 1/2 - 2/3 = \frac{3-4}{6} = \frac{-1}{6} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2/3 \\ b = \frac{-1}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{-1}{9} \end{cases}$$

$$Q(x) = 2/3\, x - \frac{1}{9}$$

4) Conclusion

$$S = \left\{ x \longmapsto k e^{-3/2 x} + \frac{2}{3}x - \frac{1}{9} \right\}_{k \in \mathbb{R}}$$