Exemple 16 :

b)

$$id : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad id(x) = x$

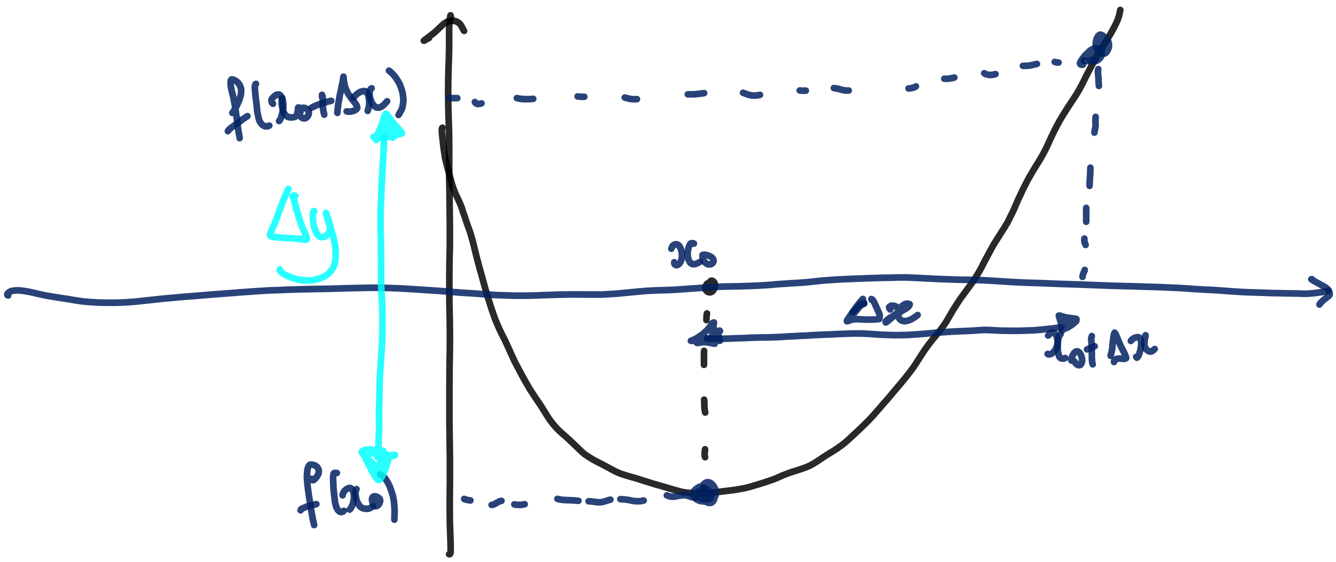
$\quad id'(x) = 1$

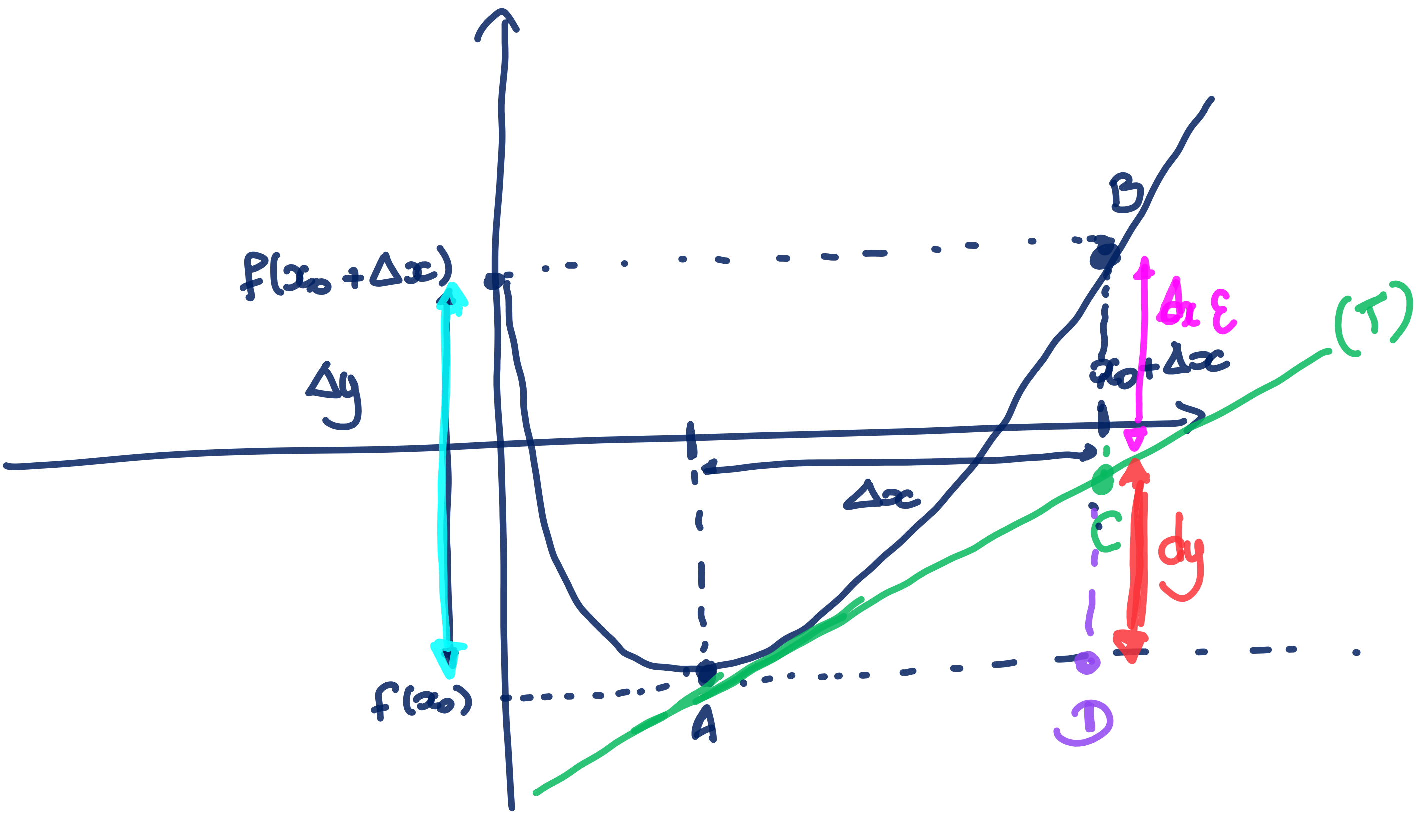
$\forall a \in \mathbb{R}$ $\quad d\,id_a(x) = id'(a) \cdot x$

$\quad d\,id_a(x) = x$

donc $\quad d\,id_a = id$

la fonction identité a pour différentielle elle-même en tout point.





$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$
$$= df_{x_0}(\Delta x) + \varepsilon(x)\,\Delta x \quad \text{avec} \quad \varepsilon(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$$

. $A\begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0)\end{pmatrix}$ $\quad B\begin{pmatrix} x_0+\Delta x \\ f(x_0+\Delta x)\end{pmatrix}$

. Rappelons l'équat° de la tangente (T) en x_0 :

$$T : y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$$

ainsi $\quad C\begin{pmatrix} x_0+\Delta x \\ f'(x_0)\,\Delta x + f(x_0)\end{pmatrix}$ $\quad D\begin{pmatrix} x_0+\Delta x \\ f(x_0)\end{pmatrix}$

Calculons la distance

$$DC = \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2}$$

$$= \sqrt{0^2 + (f'(x_0)\,\Delta x)^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} DC &= f'(x_0)\,\Delta x \\ &= df_{x_0}(\Delta x) \end{aligned}}$$

donc dy c'est la variation des ordonnées le long de la tangente,

alors que Δy c'est la variation des ordonnées le long de la courbe représentative

a fixé , $df_a(h) = f'(a).h$] Egalité entre 2 images

$\Rightarrow \underbrace{df_a = f'(a).dx}$] EGALITÉ ENTRE 2 fonct°

on l'applique à la variable h

$df_a(h) = f'(a).dx(h)$

$= f'(a).h$

<u>démo du thm 6:</u>

$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$

$= df_{x_0}(\Delta x) + \varepsilon(x).\Delta x$ avec $\varepsilon(x) \underset{x\to x_0}{\to} 0$

$\Delta y = dy + \varepsilon(x)\Delta x$

donc qd $\Delta x \to 0$ à savoir $x \to x_0$

$\varepsilon(x)\Delta x \to 0$

et $\Delta y \approx dy$

Exemple 17:

$S(R) = \pi R^2$

$S'(R) = 2\pi R$

$S(D) = \pi \frac{D^2}{4}$

$S'(D) = \frac{2\pi D}{4}$

$= \frac{\pi D}{2}$

$dS_{R_0} = S'(R_0)\, dR$

$= 2\pi R_0\, dR$

$dD_{D_0} = D'(D_0) . dD$

$= \frac{\pi D_0}{2} dD$

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{or } D_0 = 2R_0 \\ &D = 2R \\ &dD = 2dR \end{aligned}}$$

$= \frac{\pi 2R_0}{2} . 2dR$

$= 2\pi R_0\, dR$

Exemple 18 :

1) $$I(U) = \frac{U}{R}$$

R fixé $R = 100\,\Omega$

U varie de 1 volt : $\Delta U = 1$ volt
mettons U varie de 220 à 221V

variation exacte :

$$\Delta I = I(221) - I(220)$$

$$= \frac{221}{100} - \frac{220}{100}$$

$$= \frac{1}{100}$$

variation approchée

ΔU petit $\Delta U = 1$ volt

donc $\Delta I \approx dI$

$$\Delta I \approx dI_{220}(\Delta U)$$

or $dI_{200}(\Delta U) = I'(220) \cdot \Delta U$

$$= \frac{1}{100}$$

ici on a m̄ égalité entre la variation exacte et la variation approchée

cela s'explique par le fait que I est 1 fonct° linéaire de U

2) I est considérée c̄ 1 fonct° de R
U fixée $U = 100$ volts

$$I(R) = \frac{100}{R}$$

R varie de 100Ω ā 101Ω

variation exacte:

$$\Delta I = \frac{U}{101} - \frac{U}{100} = \frac{100}{101} - 1 = -0,0099$$

variation approchée ā l'aide d'1 differentielle

$\Delta I \approx dI$ car ΔR petit

$$\approx dI_{R_0}(\Delta R)$$

$$\approx I'(R_0) . \Delta R$$

$$\approx -\frac{100}{R_0^2} . 1$$

$$\approx \frac{-100}{100^2}$$

$$\approx -0.01$$

ici c'est bien 1 approximat°

Remarque Thm 7:

$$d(fg)_a(h) = (fg)'(a).h$$
$$= [f'(a)g(a) + f(a)g'(a)].h$$
$$= g(a)\, f'(a)\, h + f(a)\, g'(a).h$$
$$= g(a)\, df_a(h) + f(a)\, dg_a(h)$$

Thm 8:

$$d\ln|f|_a(h) = \frac{f'(a)}{f(a)}.h$$

$$\Rightarrow d\ln|f|_a = \frac{df_a}{f(a)} \quad \text{por } a/\ f(a)\neq 0$$

Démo du thm 9:

$$y = fg \qquad a/\ y(a)\neq 0$$

$$dy_a = g(a)\, df_a + f(a)\, dg_a$$

$$d\ln|g|_a = \frac{dy_a}{y(a)}$$

$$= \frac{g(a)\,df_a + f(a)\,dg_a}{f(a)g(a)}$$

$$= \frac{df_a}{f(a)} + \frac{dg_a}{g(a)}$$

pour $f(x) = r(x)^2\, g(x)$

$$d\ln|f|_a = \frac{df_a}{f(a)} = \frac{2r'(a)r(a)dx}{(r(a))^2} + \frac{g'(a)}{g(a)}\,dx$$

car $\quad dv_a(h) = v'(a).h \qquad v(x) = (r(x))^2$

$$= 2r'(a)r(a).h \qquad v'(x) = 2r'(x)r(x)$$

$$dv = 2r'(a)\,r(a)\,dx$$

$$\frac{df}{f} = \frac{2dr}{r} + \frac{dg}{g}$$