Étude de fonction et fonctions usuelles

Objectifs

- **Connaître et appliquer le plan d'étude d'une fonction.**
- **Connaître les fonctions usuelles**

1 Mener une étude de fonction

1.1 Parité d'une fonction

Définition 1. Fonction paire
Soit f une fonction définie sur un ensemble I de $\mathbb{R}$. On dit que f est une fonction paire lorsque :

- I est symétrique par rapport à l'origine.
- $\forall x \in I,\ f(-x) = f(x)$

Exemple 1.
Les fonctions suivantes sont-elles paires sur leur domaine de définition ?
$f(x) = \dfrac{x^2 + \cos x + 1}{-|x| - 1}$; $g(x) = 2x + 2$

Propriété 1.
Une fonction est paire si et seulement si sa représentation graphique dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Exemple 2.
Vérifier à l'aide d'un graphique la propriété précédente.

Définition 2. Fonction impaire
Soit f une fonction définie sur un ensemble I de $\mathbb{R}$. On dit que f est une fonction impaire lorsque :

- I est symétrique par rapport à l'origine.
- $\forall x \in I,\ f(-x) = -f(x)$

Exemple 3.
Les fonctions suivantes sont-elles impaires sur leur domaine de définition ?
$f(x) = \dfrac{-x^3 + \sin x}{x^2 + 1}$; $g(x) = 2x + 2$

Propriété 2.
Une fonction est impaire si et seulement si sa représentation graphique dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'origine.

Exemple 4.
Vérifier à l'aide d'un graphique la propriété précédente.

1.2 Etudes des branches infinies

On a une branche infinie si x ou $f(x)$ tendent vers $+\infty$ ou $-\infty$.

- 1er cas : $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$: asymptote verticale $x = x_0$
- 2ème cas : $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = y_0$: asymptote horizontale $y = y_0$
- 3ème cas : $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$. On étudie $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$
  1. Si $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$: branche parabolique de direction asymptotique Oy (exemple : la fonction exp)
  2. Si $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$: branche parabolique de direction asymptotique Ox (exemple : la fonction $\ln x$)
  3. Si $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$: on étudie $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - ax$:
     (a) Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - ax = b \in \mathbb{R}$: asymptote oblique d'équation $y = ax + b$
     (b) Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - ax = \pm\infty$: branche parabolique de direction asymptotique $y = ax$

Exemple 5.
Déterminer les branches infinies de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2-3x^2}{x+3}$

1.3 Fonctions de classes $\mathcal{C}^2$, convexes et concaves

Dans ce paragraphe on considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle ouvert I.

Définition 3.
On dit que f est convexe sur I lorsque $\forall x \in I, f''(x) \geqslant 0$.

Exemple 6.
Soit f une fonction convexe sur un intervalle I.

1. Que peut-on dire des variations de la dérivée de f ?
2. En déduire l'allure d'une fonction convexe.

Définition 4.
On dit qu'une fonction f est concave sur un intervalle I lorsque $-f$ est convexe sur I.

Exemple 7.
Construire l'allure de la représentation d'une fonction concave à partir de la définition précédente.

Définition 5. Soit $x_0 \in I$. On dit que la fonction f admet un **point d'inflexion** en x_0, si et seulement si $f''(x)$ change de signe en x_0.

Représenter graphiquement un point d'inflexion.

1.4 Plan d'une étude de fonction

1. Ensemble de définition, parité, périodicité éventuelles, réduction du domaine d'étude
2. Continuité, éventuellement prolongement par continuité, dérivabilité.
3. Variations : utiliser la dérivée puis dresser le tableau des variations de f. Préciser les valeurs importantes : les bornes du domaine d'étude, les points où la dérivée est nulle ou non définie.
4. Tangentes remarquables :
   (a) Si la dérivée est nulle : tangente horizontale
   (b) Si la dérivée ou le taux de variation tend vers $+\infty$ ou $-\infty$: tangente verticale : point de non dérivabilité.
   (c) Demi-tangentes : obtenues en considérant f seulement à droite ou seulement à gauche en un point x_0
5. Limites aux bornes du domaine de définition.
6. Étude des branches infinies.
7. Établir le tableau de variation complet de f en tenant compte des points précédents.
8. Concavité, convexité, point d'inflexion, éventuellement.
9. Représentation graphique

2 Exponentielles, logarithmes, puissances

2.1 Exponentielle

Définition 6.
Il existe une unique fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, appelée exponentielle, notée exp, dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \exp(0) = 1 \\ \exp'(x) = \exp(x), \ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Par définition, exp est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Equation fonctionnelle

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \, : \, \begin{cases} \exp(x+y) = \exp(x).\exp(y) \\ \exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)} \end{cases}$$

On pose : $e = \exp(1)$ et on note $e^x = \exp(x)$.

Variations
$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0$ donc comme $\exp' = \exp$, alors exp est strictement croissante.

Limites aux bornes

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

La courbe de exp admet une asymptote horizontale en $-\infty$ d'équation $y = 0$ c'est à dire l'axe des abscisses.

Croissances comparées

$$\begin{cases} \forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \\ \forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \lim\limits_{x \to -\infty} |x|^\alpha e^x = 0 \end{cases}$$

Limite à connaître

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

2.2 Logarithme népérien

Définition 7.
La fonction logarithme népérien, notée ln est la fonction réciproque de la fonction exp car exp est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]0; +\infty[$. La fonction ln est donc définie de $]0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

Variations
ln est de même sens de variations que exp ainsi ln est continue, dérivable et strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
Dérivée

$$\forall x > 0, \ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln x)} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

Limites aux bornes

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

La courbe de ln admet une asymptote verticale en 0.

Equation fonctionnelle

$$\forall x, y > 0 \ : \ \begin{cases} \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \\ \ln \dfrac{1}{x} = -\ln x \end{cases}$$

Croissances comparées

$$\begin{cases} \forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \\ \forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha \ln x = 0 \end{cases}$$

Limite à connaître

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Exemple 8. Étudier la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + e^x)$

2.3 Fonctions exponentielles et logarithmes de base quelconque

2.3.1 Fonctions exponentielles de base quelconque

Définition 8.
Soit $a > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit l'exponentielle de base a par :

$$a^x = \exp(x \ln a) = e^{x \ln a}$$

Ainsi, l'étude d'une exponentielle de base a se ramène à celle d'une exponentielle classique du type $e^{\alpha x}$.

2.3.2 Fonctions logarithmes de base quelconque

Définition 9.
Soit $a > 0$ et $a \neq 1$. Pour tout $x > 0$, on définit le logarithme de base a par :

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

De même, l'étude d'une fonction logarithme de base a se ramène, à un facteur multiplicatif près à celle de la fonction ln.

2.3.3 Fonction logarithme décimal

Une fonction logarithme de base 10 est appelée logarithme décimal, il est noté log. Cette fonction est la fonction réciproque de la fonction exponentielle de base 10 : $x \to 10^x$. Elles donc utilisée lorsqu'on manipule des puissances de 10.

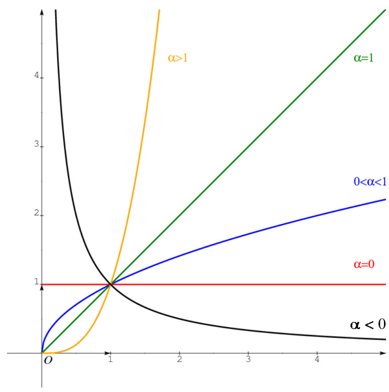
Exemple 9. Par exemple, en chimie, nous avons la formule : $[H^+] = 10^{-PH}$. En déduire PH en fonction de la concentration en $[H^+]$.

2.4 Fonctions puissances

Définition 10.
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit :

$$f_\alpha : \begin{pmatrix} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^\alpha \end{pmatrix}$$

avec $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.
Ainsi, là aussi, on se ramène à l'étude d'une exponentielle classique, sauf dans les cas α entier naturel (fonction puissance classique), entier relatif négatif (fonction inverse d'une fonction puissance classique), rationnel et on a : $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$.



2.5 Croissances comparées

Soient $\alpha > 0$ et $a, b > 1$: on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\log_b x}{x^\alpha} = 0 \qquad \lim_{x \to 0} x^\alpha \log_b x = 0$$

On résume cela ainsi : en $+\infty$:

$$\log_b x \ll x^\alpha \ll a^x$$

3 Fonctions circulaires

3.1 Fonction périodique

Définition 11.
Soit T un réel, et f une fonction définie sur un ensemble I de $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction f est une fonction T périodique, ou de période T, lorsque :

- $\forall x \in I,\ x + T \in I.$
- $\forall x \in I,\ f(x + T) = f(x)$

Exemple 10.
Soit f la fonction définie par $f(t) = \cos(\omega t)$ pour t réel. Montrer que f est une fonction de période $\dfrac{2\pi}{\omega}$. ω est appelé pulsation en physique.

Proposition 1.
Soit a, b, et ω trois réels. Alors il existe trois réels ϕ, ϕ' et A tels que :

$$\text{pour tout réel } t : a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) = A\sin(\omega t + \phi) = A\cos(\omega t + \phi')$$

On a : $A = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\tan\phi = \dfrac{a}{b}$ et $\tan\phi' = -\dfrac{b}{a}$

La propriété précédente se traduit de la façon suivante en physique : le somme de deux signaux sinusoïdaux de même pulsation (et donc de même période) est un signal sinusoïdal de même pulsation (et donc de même période) avec un déphasage de ϕ.

Exemple 11.
Démontrer la propriété précédente, puis écrire sous la forme $A\sin(\omega x+\phi)$ l'expression $\cos 2x + \sin 2x$.

3.2 Fonctions cosinus et sinus

3.2.1 Représentations graphiques

3.2.2 Formulaire de trigonométrie

Angles associés

$\cos(-x) = \cos(x)$	$\sin(-x) = -\sin(x)$
$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$	$\sin(\pi - x) = \sin(x)$
$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$	$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$	$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$
$\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin(x)$	$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x)$

Somme

- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a)$

Linéarisation

- $\cos^2(a) = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$
- $\sin^2(a) = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$
- $\sin(a)\cos(a) = \dfrac{1}{2}\sin(2a)$

Valeurs remarquables

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(\theta)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	

Résoudre une équation du type $\cos(x) = \cos(a)$

$$\cos(a) = \cos(b) \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (1) \\ \text{ou} \\ a = -b + 2k'\pi, \quad k' \in \mathbb{Z} \quad (2) \end{cases}$$

Résoudre une équation du type $\sin(x) = \sin(a)$

$$\sin(a) = \sin(b) \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (1) \\ \text{ou} \\ a = \pi - b + 2k'\pi, \quad k' \in \mathbb{Z} \quad (2) \end{cases}$$

3.3 Fonction tangente

Définition 12.
On définit la fonction tangente par $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ sur $\mathbb{R} - \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

Proposition 2.

- La fonction tangente est une fonction π périodique et impaire.
- $\tan'(x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
- $\lim\limits_{\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$

4 Fonctions hyperboliques

4.1 Cosinus et sinus hyperboliques

Définition 13. Par analogie avec les formules d'Euler, on appelle cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$\begin{cases} \mathrm{ch} : x \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \mathrm{sh} : x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$$

Continuité, dérivabilité
ch et sh sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$

Compléter les propriétés de ch et sh.

Parité

- La fonction ch est une fonction ....
- la fonction sh est une fonction ....

Dérivée

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \mathrm{ch}'(x) = \\ \mathrm{sh}'(x) = \end{cases}$$

Tableau de variations

x	
$\mathrm{ch}\, x$	

x	
$\mathrm{sh}\, x$	

Signe
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{ch}(x)$ ....
$\mathrm{sh}(x)$ change de signe en ....

Exemple 14.
Étudier la fonction $f : x \mapsto \tan x - \dfrac{1}{\tan x}$

5 Manipulation de graphes

5.1 Introduction

partie A) Expérimentation

1) Dessiner le graphe de la fonction exponentielle.
2) Dessiner sur le papier les graphes des quatre fonctions suivantes : $-\exp(x)$; $\exp(x)+1$; $\exp(x)-1$; $2\exp(x)$.
3) Par quelles transformations géométriques passe-t-on du graphe de l'exponentielle aux graphes tracés ?
4) Mêmes questions pour les quatre fonctions $\exp(-x)$; $\exp(x+1)$; $\exp(x-1)$; $\exp(2x)$.

partie B) Énoncé des correspondances

Relier chaque formule à la transformation géométrique qui lui correspond, en la précisant si possible.

(a) $-f(x)$;	(1) translation vers le haut ;
(b) $f(x)+1$;	(2) translation vers le bas ;
(c) $f(x)-1$;	(3) translation vers la gauche ;
(d) $2f(x)$;	(4) translation vers la droite ;
(e) $f(-x)$;	(5) symétrie par rapport à l'axe des abscisses ;
(f) $f(x+1)$;	(6) symétrie par rapport à l'axe des ordonnées ;
(g) $f(x-1)$;	(7) dilatation d'un facteur 2 dans le sens vertical ;
(h) $f(2x)$.	(8) dilatation d'un facteur 1/2 dans le sens horizontal.

partie C)

1) Quelle formule correspond à une homothétie de rapport 2, centrée en l'origine ?
2) À une rotation d'un demi-tour, centrée en l'origine ?

5.2 Bilan

Certaines fonctions ont leur expression analytique construites à partir d'une fonction usuelle. Ces fonctions sont dites associées à une fonction de référence. L'étude de ce type de relation fonctionnelle permet d'obtenir rapidement et sans peine leurs représentations graphiques.
Soient f et g deux fonctions numériques, définies respectivement sur D_f et D_g, de courbes représentatives respectives C_f et C_g dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

5.2.1 Translations

Théorème 1 (Translation verticale)**.**
Si $g(x) = f(x) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$
Alors $\mathcal{C}_g$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par la translation verticale de vecteur $k\vec{\jmath}$.

Théorème 2 (Translation horizontale)**.**
Si $g(x) = f(x+k)$ avec $k \in \mathbb{R}$
Alors $\mathcal{C}_g$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par la translation horizontale de vecteur $-k\vec{i}$.

5.2.2 symétries

Théorème 3 (Symétrie d'axe O_x)**.**
Si $g(x) = -f(x)$
Alors $\mathcal{C}_g$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par la symétrie orthogonale d'axe O_x.

Théorème 4 (Symétrie d'axe O_y)**.**
Si $g(x) = f(-x)$
Alors $\mathcal{C}_g$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par la symétrie orthogonale d'axe O_y.

Théorème 5 (Symétrie centrale de centre O)**.**
Si $g(x) = -f(-x)$
Alors $\mathcal{C}_g$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par la symétrie centrale de centre O.

5.2.3 Dilatation

Théorème 6 (Dilatation verticale)**.**
Si $g(x) = k.f(x)$ avec $k > 0$
Alors C_g est l'image de C_f par une dilatation verticale de facteur k.

Théorème 7 (Dilatation horizontale)**.**
Si $g(x) = f(k.x)$ avec $k > 0$
Alors C_g est l'image de C_f par une dilatation horizontale de facteur $\frac{1}{k}$.

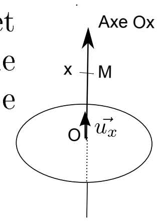
Théorème 8 (Homothétie de centre O et de rapport k)**.**
Si $g(x) = k.f(\frac{1}{k}.x)$ avec $k > 0$
Alors C_g est l'image de C_f par une homothétie de centre O et de rapport k.

Exercices

6 TD1-2-3

Exercice 1.

En électromagnétisme, vous verrez au S2, le champ et le potentiel électriques créés par un disque, de rayon R, métallique plat (et sans épaisseur) uniformément électrisé avec une densité surfacique de charge constante σ. Vous trouverez qu'en un point M d'abscisse x de son axe, le potentiel électrique est :



$$V(x) = V(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{R^2 + x^2} - \sqrt{x^2})$$

1. Étudier la fonction V. V est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

2. On définit la fonction $\vec{E}$ qui est le champ électrique au point M par
$$\vec{E} = -\frac{dV}{dx}\vec{u_x}$$
A partir de l'étude de V déduire la limite de E en 0 et en $+\infty$.
3. Les résultats précédents sont-ils cohérents avec le phénomène physique ?

Exercice 2.
Étudier les fonctions
1. $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$
2. $f : x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$

Exercice 3 (Étude d'une famille de fonctions)**.**
On se propose l'étude, pour n entier naturel non nul, des fonctions f_n définies par
$$f(x) = x - n - n\frac{\ln x}{x}$$
On note C_n la représentation graphique de f_n dans un repère orthogonal.

A. Etude de f_n
1. Donner le domaine de définition de f.
2. Soit g_n la fonction définie sur $]0; +\infty[$, par $g_n(x) = x^2 - n + n\ln x$
   (a) Montrer qu'il existe un unique réel α_n tel que $g(\alpha_n) = 0$, puis que $\alpha_n \in [1; 3]$. Déterminer α_1.
   (b) Calculer f_n' et en déduire les variations de f_n.
   (c) Montrer que $f_n(\alpha_n) = 2\alpha_n - n - \dfrac{n}{\alpha_n}$ et en déduire la limite de $f_n(\alpha_n)$.
3. Étudier les branches infinies de f_n, et étudier la position relative de C_n par rapport à ses éventuelles asymptotes sur $]0; +\infty[$.

B. Étude des positions relatives des courbes C_n
Soit $d(x) = f_n(x) - f_{n+1}(x)$.
1. Étudier les variations de d, préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.
2. En déduire que l'équation $d(x) = 0$ admet une solution unique β et que β appartient à l'intervalle $[0\,;\,1]$.
3. En déduire la position relative de C_n et C_{n+1}.
4. Représenter, sur un même graphique, les allures de C_n et C_{n+1}.

Exercice 4.
Étudier la fonction suivante : $U(r) = \dfrac{r^2 - R}{r + R}$ où R est une constante non nulle.

7 TD4

Exercice 5.

Calculer les valeurs exactes des expressions suivantes
$\cos(\frac{-3\pi}{4})$ $\cos(\frac{5\pi}{6})$ $\sin(\frac{123\pi}{6})$ $\cos(\frac{\pi}{12})$ $\sin(\frac{\pi}{12})$

Exercice 6.
Donner la plus petite période des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \sin(3x)$
2. $f_1(x) = \cos(\omega x + \frac{\pi}{4})$
3. $f_1(x) = \sin(3x) - \cos(\frac{2x}{3})$
4. $f_1(x) = \frac{\tan(4x)}{\tan(2x)}$

Exercice 7.
Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$ et $[0; 2\pi]$.

1. $\sin(2x) = \sin(\frac{\pi}{3})$
2. $\cos(3x + \pi) = \cos(\frac{\pi}{2})$
3. $\tan(3x) = 1$
4. $\sin x + \sin(2x) = 0$

Exercice 8.
Résoudre les inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$.

1. $\sin(2x) \leqslant \frac{1}{2}$
2. $\cos(3x + \pi) > -\frac{\sqrt{2}}{2}$
3. $\tan(3x) > 1$

8 TD5-6-début7

Exercice 9.
Étudier les fonctions

1. $h : x \mapsto \operatorname{ch}\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)$
2. $i : x \mapsto \ln(1 + \operatorname{th} x)$

Exercice 10.
Écrire $\operatorname{ch}(x)$ en fonction de $\operatorname{sh}(x)$ et $\operatorname{sh}(2x)$.
Simplifier $u_n = \prod_{p=1}^{n} \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2^p}\right)$, en déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 11.

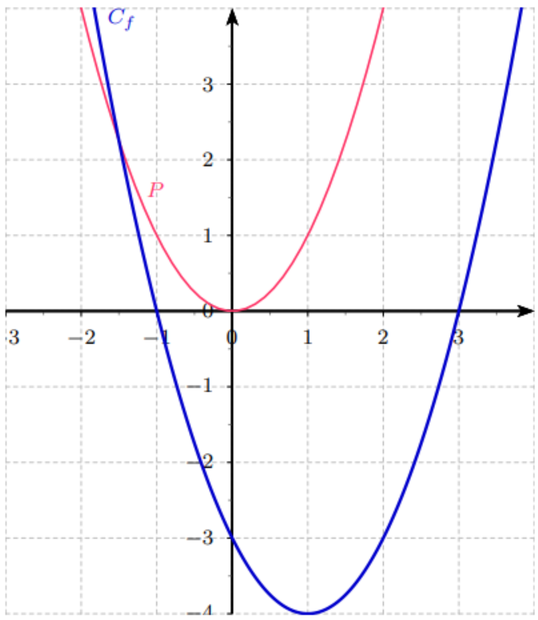
1. Étudier la fonction $f(x) = e^{\operatorname{sh}(x)} - (1 + x)$ sur $[-1; 1]$ (on pourra dériver deux fois f).
   En déduire que $\forall x \in \,]0; 1[\,, 1 + x \leqslant e^{\operatorname{sh} x} \leqslant \frac{1}{1-x}$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sum_{p=n}^{kn} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{p}\right)$, calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 12. (Facultatif)
Résoudre le système :

$$\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = \frac{35}{12} \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = \frac{25}{12} \end{cases}$$

9 fin TD7-TD8

Exercice 13.
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Voici sa représentation graphique dans un repère cartésien, accompagnée de la parabole d'équation $y = x^2$:



- Par quelle transformation géométrique semble-t-on obtenir C_f à partir de P ?
- Le démontrer par le calcul.

Exercice 14.

1. Donner une représentation graphique pour la fonction f définie par
$$f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{si } x \in [-3,-2] \\ 1 & \text{si } x \in [-2,1] \\ -x+2 & \text{si } x \in [1,5] \end{cases}$$
2. Soit h la fonction définie par $h(x) = -f(x)$.
Préciser la transformation associée puis donner le graphe et l'expression de h.
3. Même question pour $i(x) = f(-x)$
4. Même question pour $g(x) = f(x+1) + 2$

Exercice 15.

1. Tracer le plus rapidement possible les graphes des applications suivantes. On commencera par tracer le graphe de la fonction élémentaire utilisée (sinus, cosinus, *etc.*).
$f_1(x) = \sin(x) + 1$; $f_2(x) = -\cos(x)$; $f_3(x) = \ln(-x)$; $f_4(x) = 2\sqrt{x}$; $f_5(x) = \sin(2x)$; $f_6(x) = \sqrt{x+1}$
2. Plus difficile : $f_7(x) = 2\sin(x) + 1$; $f_8(x) = \ln(2x+1)$; $f_9(x) = \sin(2x) + 1$; $f_{10}(x) = 2\ln(x+1)$.