FONCTIONS : Partie I - DÉFINITIONS, LIMITES, CONTINUITÉ

**Objectifs**

- **Connaître les définitions de limites**
- **Savoir calculer des limites**
- **Connaître la notion de continuité et de prolongement par continuité.**
- **Comprendre et savoir manipuler les notations $o()$ et $\sim$.**

# 1 Domaines de définition.

En mathématiques, une fonction est un opérateur qui a un ensemble de départ et un ensemble d'arrivée. Toutefois, dans la pratique, on donne souvent une expression mathématique pour définir une fonction, sans expliciter son ensemble de départ. Le **domaine de définition** d'une fonction définie par une expression est l'ensemble des nombres réels pour lesquels cette expression a du sens (c'est-à-dire que l'on a le droit d'effectuer toutes les opérations nécessaires à réaliser l'expression de la fonction). Quelques exemples :

- Si l'expression comporte un terme $\frac{\cdot}{u}$, il faut s'assurer que $u \neq 0$.
- Si l'expression comporte un terme $\sqrt{u}$, il faut s'assurer que $u \geqslant 0$.
- Si l'expression comporte un terme $\ln u$, il faut s'assurer que $u > 0$.

**Exemple 1.**
Donner le domaine de définition des fonctions $f$, $g$, $h$ définies par

$$f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^2-1}, \quad g(x) = \frac{\ln(x)}{x-2}, \quad h(x) = \frac{\sqrt{x^3}}{x}.$$

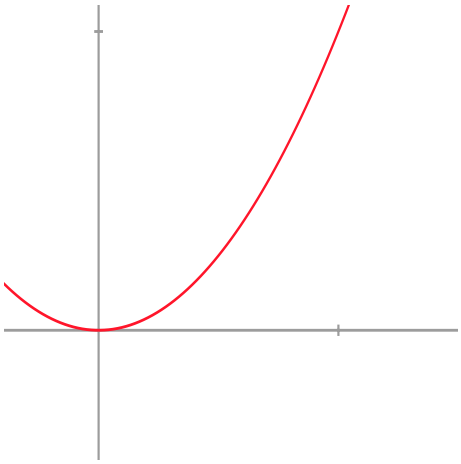
# 2 Définition de la notion de limite

Dans tout ce paragraphe, on considère une fonction $f$ d'un intervalle $I$ dans $\mathbb{R}$.
$a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

## 2.1 Limite finie en a

**Définition 1.**
Soit $l \in \mathbb{R}$.
Notation : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ ou $f(x) \underset{x \to a}{\to} l$, se lit : "$f$ converge vers $l$ quand $x$ tend vers $a$".

1. Cas où $a \in \mathbb{R}$ : on dit que $f$ admet $l$ pour limite en $a$ si et seulement si :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \backslash \{a\}, |x - a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon$$



**Exemple 2.** Écrire, en symboles mathématiques, que $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq l$.

2. Cas où $a = +\infty$ : on dit que $f$ admet $l$ pour limite en $+\infty$ si et seulement si :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geqslant A \Rightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon$$

3. Cas où $a = -\infty$ : on dit que $f$ admet $l$ pour limite en $-\infty$ si et seulement si :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \leqslant A \Rightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon$$

Intuitivement, l'assertion $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ a la signification suivante : quelque soit $\varepsilon > 0$, pour que $f(x)$ soit à distance $\leqslant \varepsilon$ de $l$, il suffit que $x$ soit suffisamment voisin de $a$. Toutefois, il faut faire attention : cette formulation dissimule l'idée importante de la définition à savoir que le voisinage en question dépend de $\varepsilon$.

**Exemple 3.** Montrer que si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, alors pour tout $x$ suffisamment grand, $f(x) \geqslant 0$.

**Théorème 1.** *Unicité de la limite*
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $l$ et $l'$ deux réels. On suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l'$. Alors $l = l'$.

**Remarque 1.** La limite en un réel $a$ est unique mais elle n'est pas forcément égale à $f(a)$.

## 2.2 Limite infinie en a

Dans ce paragraphe, $a$ est une extrémité finie ou infinie de l'intervalle $I$.

**Définition 2.**
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

1. Cas où $a \in \mathbb{R}$ : on dit que $f$ admet $+\infty$ (respectivement $-\infty$) pour limite en $a$ si et seulement si :
$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in I\backslash\{a\}, |x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow f(x) \geqslant B \text{ (respectivement, f(x) } \leqslant \text{ B)}$$
2. Cas où $a = +\infty$ : on dit que $f$ admet $+\infty$ (respectivement $-\infty$) pour limite en $+\infty$ si et seulement si :
$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geqslant A \Rightarrow f(x) \geqslant B \text{ (respectivement, f(x) } \leqslant \text{ B)}$$
3. Cas où $a = -\infty$ : on dit que $f$ admet $+\infty$ (respectivement $-\infty$) pour limite en $-\infty$ si et seulement si :
$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \leqslant A \Rightarrow f(x) \geqslant B \text{ (respectivement, f(x) } \leqslant \text{ B)}$$

On note : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ respectivement $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$

**Exemple 4.**
Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et soit $a$ un réel. Représenter une fonction $f$ vérifiant la propriété suivante :
$$\exists \alpha \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0, |x-a| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon$$

### 2.2.1 Limite à droite, limite à gauche

**Définition 3.** *Limite à gauche*
On suppose que $x_0$ n'est pas la borne gauche de $I$. Si on étudie les valeurs de $f(x)$ uniquement pour $x < x_0$ et $x \in I$ alors on dit qu'on étudie la limite à gauche de $f$ en $x_0$ et on note : $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x<x_0}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$

**Exemple 5.** Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x}$

**Définition 4.** *Limite à droite*
On suppose que $x_0$ n'est pas la borne droite de $I$. Si on étudie les valeurs de $f(x)$ uniquement pour $x > x_0$ et $x \in I$ alors on dit qu'on étudie la limite à droite de $f$ en $x_0$ et on note : $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x>x_0}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$

**Exemple 6.** Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x}$

**Propriété 1.** On suppose que $x_0$ est un élément de $I$ distinct des bornes de $I$. Alors $f$ admet une limite en $x_0$ si et seulement si la limite à droite est égale à la limite à gauche. La limite de $f$ en $x_0$ est alors égale à la limite à droite ou à gauche en $x_0$.

**Remarque 2.**
Si $x_0$ est une des bornes de $I$ alors :

- Si $I = ]x_0; ...$ ou $I = [x_0; ..$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$.
- Si $I = ...; x_0[$ ou $I = ...; x_0]$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$.

**Exemple 7.** On considère la fonction : $\delta : \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x = 0 \\ \dfrac{|x|}{x} \text{ si } x \neq 0 \end{cases} \end{array}$

$\delta$ admet-elle une limite en 0 ?

**Exemple 8.** La fonction suivante admet-elle une limite en 0 ? $f : \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x}, \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases} \end{array}$

# 3 Opérations sur les limites.

Dans la pratique, on ne reviendra presque jamais à la définition de limite, mais on utilisera des opérations sur les limites. En revanche, dès que l'on est en présence d'une **Forme Indéterminée (F.I.)**, il faudra regarder dans le détail l'expression dont on veut étudier la limite. Dans la suite, $a$ désigne soit un réel soit un infini.

## 3.1 Limite d'une somme

$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) =$

| $\lim_{x\to a} f(x) =$ <br> $\lim_{x\to a} g(x) =$ | $l \in \mathbb{R}$ | $+\infty$ | -$\infty$ |
|---|---|---|---|
| $m \in \mathbb{R}$ | $m+l$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | **F.I.** |
| -$\infty$ | $-\infty$ | **F.I.** | $-\infty$ |

## 3.2 Limite d'un produit

$\lim_{x\to a}(f(x).g(x)) =$

| $\lim_{x\to a} f(x) =$ <br> $\lim_{x\to a} g(x) =$ | $l > 0$ | $l < 0$ | 0 | $+\infty$ | -$\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $m > 0$ | ml | ml | 0 | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $m < 0$ | ml | ml | 0 | $-\infty$ | $+\infty$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | **F.I.** | **F.I.** |
| $+\infty$ | $+\infty$ | -$\infty$ | **F.I.** | $+\infty$ | -$\infty$ |
| -$\infty$ | -$\infty$ | $+\infty$ | **F.I.** | -$\infty$ | $+\infty$ |

## 3.3 Limite d'un quotient

$\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} =$

| $\lim_{x\to a} f(x) =$ <br> $\lim_{x\to a} g(x) =$ | $l > 0$ | $l < 0$ | 0 | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $m > 0$ | $\frac{l}{m}$ | $\frac{l}{m}$ | 0 | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $m < 0$ | $\frac{l}{m}$ | $\frac{l}{m}$ | 0 | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $0^+$ | $+\infty$ | $-\infty$ | **F.I.** | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $0^-$ | $-\infty$ | $+\infty$ | **F.I.** | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\pm\infty$ | 0 | 0 | 0 | **F.I.** | **F.I.** |

**Exemple 9.**
Donner un exemple de forme indéterminée dans chacun des cas précédents.

**Exemple 10.** Pour chacun des exemples suivants, dire si l'on peut conclure ou non directement sur l'existence d'une limite.

1. $\sqrt{x+2} - \sin(x)$ quand $x \to 0$ ?

0. FI = Forme Indéterminée, c'est à dire que l'on ne peut rien dire à l'avance, tous les cas sont possibles

2. $\dfrac{\sqrt{x^2+2}}{2x+7}$ quand $x \to +\infty$ ?
3. $\dfrac{e^{-x}}{x^2}$ quand $x \to 0$ ? Quand $x \to +\infty$ ?
4. $x - \sqrt{x^2+7}$ quand $x \to +\infty$ ? Quand $x \to -\infty$ ?

## 3.4 Limite d'une composée de fonctions

**Définition 5.**
Soit $f$ une fonction définie sur un ensemble $I$ et $g$ une fonction définie sur $f(I)$. Alors $g \circ f$ est la fonction définie sur $I$ par $g \circ f(x) = g(f(x))$ pour tout $x \in I$.

**Exemple 11.**

1. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$ avec $f(x) = x + 3$ et $g(x) = x^2 - 1$.
2. Déterminer deux fonctions $f$ et $g$ telles que $h = f \circ g$ avec $h(x) = \sqrt{x^4 + 2x^2 + 1}$.

**Théorème 2.**
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$ de sorte que la composée $g \circ f$ ait un sens.

1. Si $f$ possède une limite (finie ou infinie) $b$ en $a$ alors $b$ est un élément ou une borne de $J$
2. Si de plus $g$ possède une limite (finie ou infinie) $l$ en $b$, alors $g \circ f$ admet la limite $l$ en $a$ :

$$\begin{cases} f(x) \underset{x \to a}{\to} b \\ g(x) \underset{x \to b}{\to} l \end{cases} \Rightarrow g\left(f(x)\right) \underset{x \to a}{\to} l$$

**Exemple 12.**
Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)$

## 3.5 Fonctions négligeables et équivalentes.

### 3.5.1 Fonctions négligeables, notation o()

**Définition 6.**
Soit $a$ un nombre réel ou une borne d'un intervalle où deux fonctions $f$ et $g$ sont définies.
On dit que $f$ est **négligeable devant $g$ au voisinage de $a$** si

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0.$$

On le note "$f(x) = \underset{x \to a}{o}(g(x))$", " $f(x) = o\left(g(x)\right)$ au voisinage de $a$" ou, s'il n'y a pas de confusion possible, $f = o(g)$. Cette notation se lit "f est un petit o de g au voisinage de $a$". Cela traduit que $f(x)$ est "infiniment petit" par rapport à $g(x)$ au voisinage de $a$.

**Exemple 13.**

1. Montrer que $f(x) = x^2 - 3x + 1$ est négligeable devant $g(x) = x^3$ en $+\infty$.
2. Montrer que $\sqrt{x} = o(x)$ en $+\infty$ mais que $x = o(\sqrt{x})$ en 0.

**Remarque 3.** Un cas particulier important : $f(x) = o(1)$ quand $x \to a$ si, et seulement si, $f(x) \to 0$ quand $x \to a$. En particulier, $f(x) = L + o(1) \iff f(x) \to L$ quand $x \to a$.

On verra dans un chapitre suivant que cette notion intervient dans le calcul de **croissances comparées** qui sont très utiles pour lever des **formes indéterminées** :

**Proposition 1.** Pour $\alpha, \beta > 0$, on a :

- en $+\infty$ :
$$x^\alpha = o(x^\beta) \text{ ssi } \alpha < \beta, \quad x^\alpha = o(e^x), \quad \ln x = o(x^\beta).$$
- en $0^+$ :
$$x^\beta = o(x^\alpha) \text{ ssi } \alpha < \beta, \quad \ln x = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right).$$

### 3.5.2 Fonctions équivalentes

**Définition 7.** On dit que $f$ et $g$ sont deux fonctions équivalentes au voisinage de $a$, et on note $f \underset{a}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ si
$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1.$$
De façon équivalente, $f \sim g \iff f(x) = g(x)(1 + o(1))$ quand $x \to$, ou encore $f \sim g \iff f(x) = g(x) + o(g(x))$.

**Exemple 14.**
1. Montrer que $2x^3 - 5x^2 + \dfrac{1}{x} \sim 2x^3$ quand $x \to +\infty$.
2. Montrer que $2x^3 - 5x^2 + \dfrac{1}{x} \sim \dfrac{1}{x}$ quand $x \to 0$.
3. Montrer que $e^x \sim 1$ quand $x \to 0$.

**Remarque 4.** On voit dans la définition qu'une fonction ne peut JAMAIS être équivalente à 0.

Pour trouver un équivalent simple d'une expression, on peut mettre le terme dominant (au voisinage de $a$) en facteur et vérifier que le reste des termes tendent vers 1.

**Proposition 2.** Quelques propriétés des équivalents : au voisinage de $a$,

1. Si $f \sim f_1$ et $g \sim g_1$ alors $fg \sim f_1 g_1$.
2. Si $f \sim f_1$ et $g \sim g_1$ alors $\dfrac{f}{g} \sim \dfrac{f_1}{g_1}$.
3. Si $f \sim g$ et $f \to L$ avec $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, alors $g \to L$.
4. Une fonction polynômiale est équivalente à son terme de plus haut degré en $+\infty$ ou $-\infty$.

Cette proposition est très utile en pratique : elle nous dit que pour trouver un équivalent d'un quotient ou d'un produit, il suffit de trouver un équivalent de chacun des termes. De plus, le 3. nous indique que pour trouver la limite d'une fonction, il suffit de regarder la limite de son équivalent si on dispose d'un équivalent simple.

**Exemple 15.** 1. Déterminer la limite de $\dfrac{x^3-3x^2+12}{3x^3+x^2+x+1}$ en $+\infty$, puis en $-\infty$.

2. Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $f(x)=(\sqrt{x}-2).\dfrac{x^2-3x+1}{3x^3+1}$, puis en déduire sa limite en $+\infty$.

### 3.6 Limite avec les fonctions racines carrées

Il y a deux exemples types à connaître :

- Forme indéterminée en $+\infty$ de la forme $\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-4}}$ : on factorise par l'équivalent $(\sqrt{x})$ dans le numérateur et le dénominateur.
- Forme indéterminée de la forme $\sqrt{x+3}-\sqrt{x+7}$ : on multiplie et on divise par la quantité conjuguée $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+7}$.

**Exemple 16.**
Justifier que les deux exemples types précédents sont bien des formes indéterminées puis calculer les limites en $+\infty$ à l'aide de la méthode proposée.

## 4 Limites et inégalités

### 4.1 Théorèmes

$a$ est soit un réel soit l'infini.

**Théorème 3.** *Passage des inégalités larges à la limite*
Soient $f, g$ deux fonctions de $I$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f$ et $g$ admettent toutes deux des limites finies $l$ et $m$ en $a$ et que $f \leqslant g$ au voisinage de $a$ alors : $l \leqslant m$

**Exemple 17.**
Si l'on a $f, g$ deux fonctions de $I$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f$ et $g$ admettent toutes deux des limites finies $l$ et $m$ en $a$ et que $f < g$ au voisinage de $a$ alors a t-on : $l < m$ ?

**Théorème 4.** *Théorème des Gendarmes*

Soient $f, g, h$ trois fonctions de $I$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que : $\begin{cases} f(x) \underset{x\to a}{\to} l \\ h(x) \underset{x\to a}{\to} l \end{cases}$ et $f \leqslant g \leqslant h$ au voisinage de $a$, alors $g(x) \underset{x\to a}{\to} l$

**Exemple 18.** Déterminer la limite en $+\infty$ de $\dfrac{\cos x}{x}$.

**Remarque 5.** (Cas $l = 0$) En particulier, le théorème des gendarmes implique que pour montrer que $f(x) \underset{x\to a}{\to} 0$, il suffit de montrer que $0 \leqslant |f(x)| \leqslant g(x)$ pour une certaine fonction $g$ telle que $g(x) \underset{x\to a}{\to} 0$. Cela nous permet de faire des majorations de la valeur absolue grâce à l'inégalité triangulaire pour montrer qu'une fonction tend vers 0.

**Exemple 19.** Montrer que $\dfrac{1+3\cos(x)-\sqrt{x}}{x} \longrightarrow 0$ quand $x \to +\infty$.

**Propriété 2.**

1. Soient $f, g$ deux fonctions de $I$ dans $\mathbb{R}$. On suppose $f(x) \underset{x\to a}{\to} +\infty$ et $f \leqslant g$ au voisinage de $a$, alors $g(x) \underset{x\to a}{\to} +\infty$
2. Soient $f, g$ deux fonctions de $I$ dans $\mathbb{R}$. On suppose $g(x) \underset{x\to a}{\to} -\infty$ et $f \leqslant g$ au voisinage de $a$, alors $f(x) \underset{x\to a}{\to} -\infty$

**Exemple 20.**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x + \cos x$. Que vaut : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ?

# 5 Théorème de la limite monotone

**Théorème 5.**
Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I = ]a; b[$, avec $a$ et $b$ dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. Si $f$ est monotone sur $I$, alors elle admet une limite finie ou infinie en $a$ et en $b$.

**Exemple 21.**

1. Que peut-on dire de la limite d'une fonction $f$ dans les cas suivants :

(a) $f$ est croissante ?

(b) $f$ est majorée ?

2. Quelle(s) condition(s) suffisante(s) doit-on avoir sur $f$ pour que $f$ admette une limite finie ? Ces conditions sont-elles des conditions nécessaires ?

# 6 Continuité

## 6.1 Fonction continue

On étudie ici la limite d'une fonction en un point où elle est définie

**Définition 8.**
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

1. Soit $x_0 \in I$. $f$ est continue en $x_0$ signifie que :
   - $f$ admet une limite finie en $x_0$
   - $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

   Si une de ces deux conditions n'est pas réalisée, on dit que $f$ est discontinue en $x_0$.
2. On dit que $f$ est continue sur $I$ si et seulement si elle est continue en tout point $x_0$ de $I$.

**Exemple 22.**
La fonction $\delta$ définie dans l'exemple 7 est elle continue en 0 ?

**Propriété 3.**
Si $f$ est continue en $a$ et si $g$ est continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en $a$

**Exemple 23.**
Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \ln(\sqrt{x} + 1)$. $f$ est-elle continue en 0 ?

**Propriété 4.**
Soit $f$ une fonction définie comme opérations de fonctions usuelles (sin, cos, fonctions rationnelles...). alors $f$ est continue sur son domaine de définition.

**Remarque 6.**
Pour étudier la continuité d'une fonction sur un ensemble, on utilise la propriété précédente sur l'ensemble où $f$ une fonction définie comme opérations de fonctions usuelles, et on utilise la définition 8 pour les autres réels.

**Exemple 24.**
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} \quad \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

La fonction $f$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$ ?

## 6.2 Prolongement par continuité

**Définition 9.**
Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle ouvert I, et soit a une borne de I. Si $f$ admet une limite $l$ en a, on dit que l'on peut **prolonger $f$ par continuité en a** en posant $f(a) = l$.

**Exemple 25.**
Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}$. Rappeler le domaine de définition de cette fonction. Peut-on prolonger $f$ par continuité en $a = 1$ ?

# Exercices

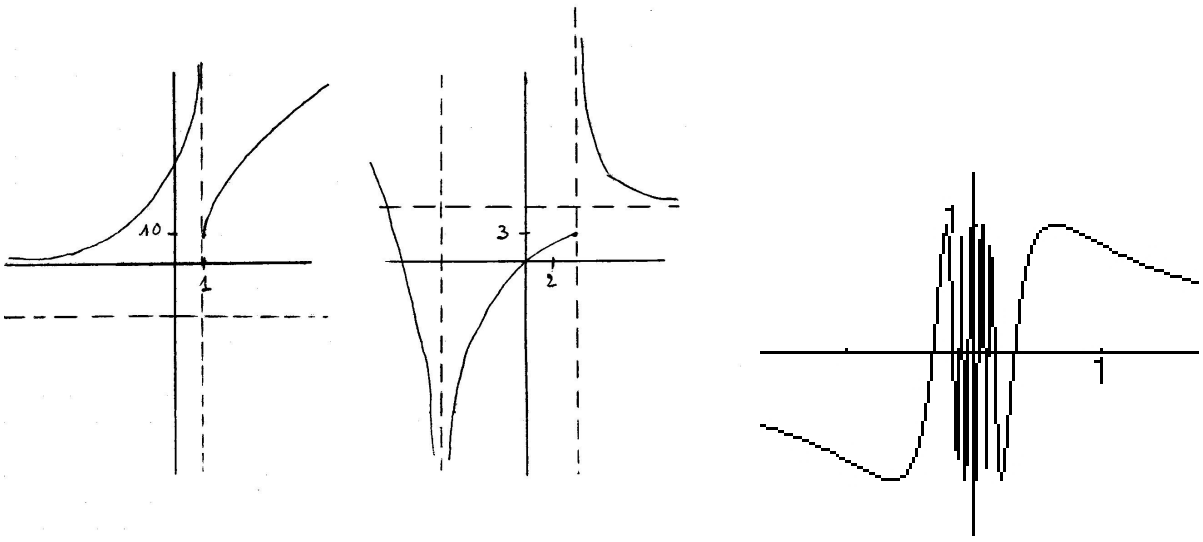
**Exercice 1.**
Donner le domaine de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ ;
2. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$
3. $f(x) = \sqrt{-2x+3}$
4. $f(x) = \ln(x^3 - 4x^2 + x)$

**Exercice 2.**
Dans chacun des cas suivants, représenter une allure possible de la courbe sachant que :

1. $\lim\limits_{2^+} f = 3$, $\lim\limits_{2^-} f = -\infty$, $\lim\limits_{+\infty} f = 5$ et $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$.
2. $\lim\limits_{-1^+} f = -\infty$, $\lim\limits_{-1^-} f = 0$, $\lim\limits_{-\infty} f = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$.

**Exercice 3.**
Dans les exemples suivants, conjecturez les limites de $f$ ? Expliquez pourquoi ce ne sont que des conjectures ?




**Exercice 4.** Pour chacune des phrases mathématiques suivantes, donner la signification en termes de limites puis écrire la négation de cette phrase.

1. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I\ x \geqslant A \implies |f(x) + 2| \leqslant \varepsilon$.
2. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \neq 0\ |x| \leqslant \alpha \implies |f(x) + 3| \leqslant \varepsilon$.
3. $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists M \in \mathbb{R},\ x > M \implies x < A$.

**Exercice 5.**
Ecrire, à l'aide de symboles mathématiques, qu'une fonction n'admet pas de limite finie en $+\infty$.

**Exercice 6.** 1. Étudier la limite en $+\infty$ des deux quantités suivantes :

$$a)\ \frac{3x+7}{6x-13} + \frac{14x^2+2}{7x^2+31x-4} - 5 + \frac{1}{3x+4}, \qquad b)\ \frac{x^3}{x-2} - \frac{x^2}{x-1}.$$

2. Étudier les limites éventuelles en $+\infty$, en $-\infty$, puis en 0 de l'expression

$$\frac{e^x + 1 + \frac{1}{x}}{e^x + 4}.$$

**Exercice 7.**
Pour $R, C, \omega > 0$ et $t \in \mathbb{R}$, déterminer les limites (si elles existent) de

$$\frac{CR - \omega t^2}{CRt + \frac{1}{\omega t}}$$

quand $t \to +\infty$, $t \to -\infty$, puis $t \to 0$.

**Exercice 8.** Les affirmations suivantes sont-elles vraies/fausses ? (à justifier)

1. $\sin(x) = o(1)$ quand $x \to 0$.
2. $x^3 + x = o(x^4)$ quand $x \to 0$.
3. $x^3 + x - \ln(x) = o(x^4)$ quand $x \to +\infty$.
4. $x + \sin(x) \sim x$ quand $x \to -\infty$.
5. $e^{4x+4} = o(e^{(x^2)})$ quand $x \to +\infty$.

**Exercice 9.** Déterminer un équivalent simple de chacune des fonctions suivantes :

1. $x^3 - x\sqrt{x} + e^{-x^2} + (\ln(x))^2$ quand $x \to +\infty$.
2. $\dfrac{2x + x^4 + 3x^7}{x^3 + 3}$ quand $x \to 0$, puis quand $x \to +\infty$.
3. $x + e^x$ quand $x \to +\infty$ ; quand $x \to -\infty$ ; quand $x \to 0$ .
4. $\dfrac{x^2 + 3x}{2 + x} - x$ quand $x \to +\infty$.
5. $\sqrt{x^2 + 10}$ quand $x \to +\infty$ ; quand $x \to -\infty$.

**Exercice 10.** Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + 2|x|}{x} \qquad b)\ \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2 + 2|x|}{x} \qquad c)\ \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$$

$$d)\ \lim_{x\to \pi} \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos x} \qquad e)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x} \qquad f)\ \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$$

**Exercice 11.**
Déterminer la limite des fonctions suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x - 3\cos x$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} x + \sin x$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x + \cos x + 1}{x - \sin x}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} x + 2 + \left(\dfrac{\sin(x) - 3 + \ln(x)}{4 + \sqrt{x} + \ln(x)}\right)^2$

**Exercice 12.**
Les fonctions suivantes sont-elles continues en $a$ ?

1. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{|x|}}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$, en $a = 0$.
2. $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x - 4}$ pour $x \neq 1$ et $x \neq -4$ et $f(1) = 10$ en $a = 1$.

**Exercice 13.**
Étudier la possibilité de prolonger les fonctions données aux points donnés :

1. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ en $x = 2$
2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{\sqrt{x + 3}}$ en $x = -3$
3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x^2 + 1} - 2}{x - 1}$ en $x = 1$
4. $f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{\frac{1}{|x|} + x}{\frac{1}{|x|} + 3}\right)$ en $x = 0$.
5. $f(x) = \exp\left(\dfrac{x^2 - 6x + 8}{(x - 2)^3}\right)$ en $x = 2$.

**Exercice 14.**
Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = (-1)^{E(x)}(x - E(x))$ où $E(x)$ représente la partie entière de $x$ c'est à dire le plus grand entier inférieur ou égal à $x$. Étudier la continuité de $f$.