Ex 3 :

$f(x) = |x|$

f est elle derivable en 0 ?

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x| - 0}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

ainsi

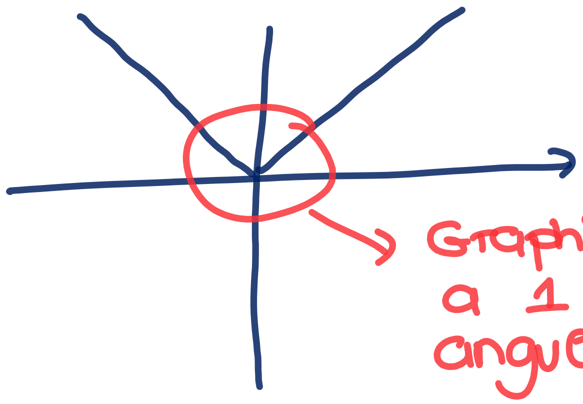
$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x}{x} = 1$$

et $$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{-x}{x} = -1$$

ainsi f est dérivable à droite en 0 $f_d'(0) = 1$

f ______ à gauche en 0 $f_g'(0) = -1$

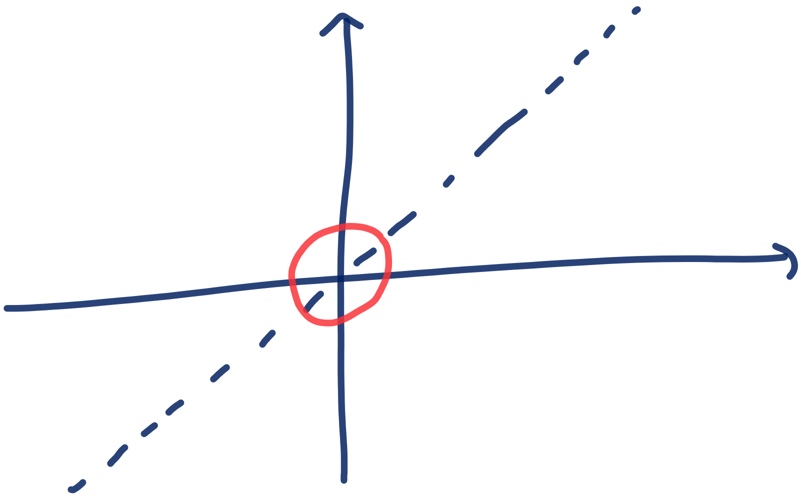
mais f n'est pas dérivable en 0



Graphiquement on a 1 point anguleux en 0

Ex 4

i) $f(x) = x$



$f_d'(0) = 1 = f_g'(0)$

ii) $f(x) = |x|$ (cf ci avant)

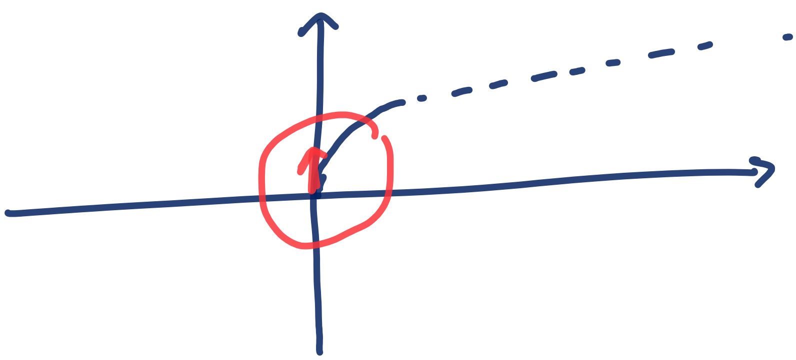
iii) $f(x) = \sqrt{x}$

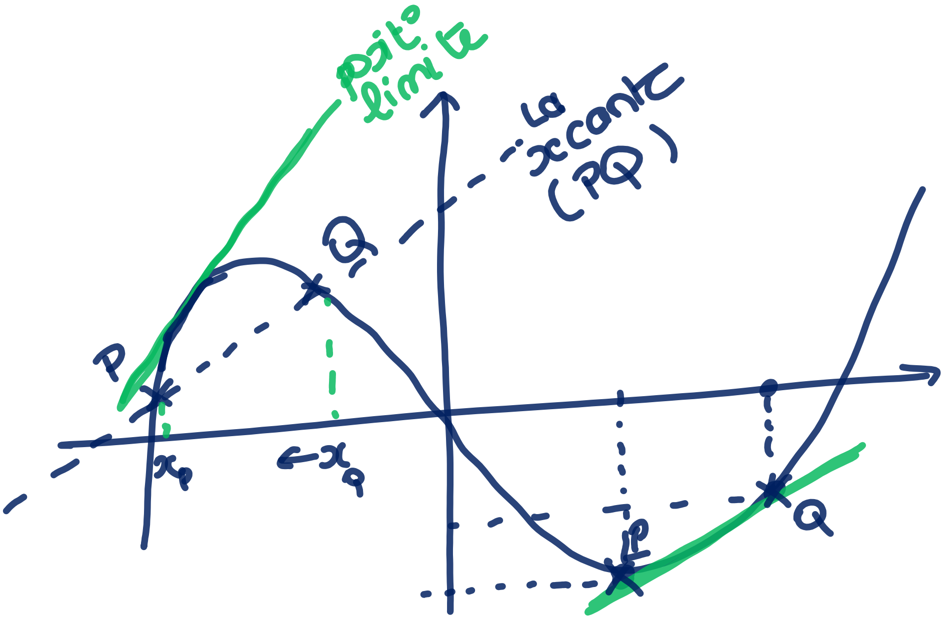
$D_f = [0, +\infty[$

f n'est pas dérivable en 0 car

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$= +\infty$$





$f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente de f en a

Ex 5 :

$f(x) = \frac{1}{x}$ $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$T : y = f(3) + f'(3)(x-3)$

$T : y = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}(x-3) = -\frac{1}{9}x + \frac{2}{3}$

Ex 6 :

f dérivable en a $\boxed{\Rightarrow}$ f continue en a

$\cancel{\boxed{\Leftarrow}}$

La Réciproque est fausse

$f(x) = \sqrt{x}$

f est continue en 0 mais non dérivable en 0

Ex 7 : $a = 0$ si f est dérivable en 0 alors

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$$

① $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\overset{f(x)}{\sin x} - \overset{f(0)}{\sin 0}}{x - 0}$$

$$= f'(0)$$ avec $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$

$$= \cos(0)$$

$$= 1$$

② $$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \cos 0}{x - 0}$$

$$= f'(0)$$ $f(x) = \cos x$

$$= -\sin(0)$$

$$= 0$$

(3)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1+0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= f'(0)$$

$$= 1$$

$f(x) = \ln(1+x)$

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$

(4)

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0}$$

$$= f'(0) \quad \text{avec} \quad f(x) = e^x$$

$$= 1$$

Ex 8 :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sin x}$$

F.I "$\frac{0}{0}$"

idée :
faire apparaître
la limite "du taux
d'accroissement"

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \times \frac{x}{\sin x}$$

ce terme tend vers $\underline{1}$

de la forme
$$\frac{f(x) - f(0)}{x}$$ avec $f(x) = \sqrt{1+x}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

$$f'(0) = 1/2$$

$$= \frac{1}{2} \times 1$$

$$= 1/2$$

Ex 9 :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{x}$$

$$= \lim_{X \to 0} \frac{\sin X}{\frac{X}{2}}$$

$$= \lim_{X \to 0} 2 \cdot \frac{\sin X}{X}$$

$$= 2$$

- F.I "$\frac{0}{0}$"
- cela ressemble à $\frac{\sin x}{x}$
- on pose $X = 2x$

Ex 10 :

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$D_f = [0, +\infty[$$

f est dérivable sur $]0, +\infty[$

donc $\mathcal{D}_{\text{dérivabilité}} =]0, +\infty[$.

en effet : $a \geq 0$ $\quad \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{a}} & \text{si } a \neq 0 \\ +\infty & \text{si } a = 0 \end{cases}$

Ex 11 :

$$\begin{tikzcd}]0,+\infty[\arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r] & \mathbb{R}^{+*} \\ x \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[rr, bend right] & \ln x \arrow[r, "g"] & e^{\ln x} \end{tikzcd}$$

$$h = g \circ f \qquad \left| \begin{array}{l} f(x) = \ln x \\ g(x) = e^{x} \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$ par thm de composition

$$h'(x) = f'(x)\, g'(f(x))$$

$$= \frac{1}{x}\, e^{\ln x}$$

Ex 12 :

$$f(x) = 3x^2 + 2x + 1$$

$$f'(x) = 6x + 2$$

$$f''(x) = 6$$

$$f'''(x) = 0$$

$$f(x) = e^{2x}$$

$$f'(x) = 2e^{2x}$$

$$f''(x) = 2^2 e^{2x}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}$$

$P(n)$: " $f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}$ "

- $P(0)$ vraie car $f^{(0)}(x) = e^{2x}$
- Supposons $P(n)$ vraie pour 1 entier $n \geq 0$,

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = 2^n . 2 e^{2x} = 2^{n+1} e^{2x}$$

$P(n+1)$ vraie

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}$.

Ex 13 :

$x \longmapsto \sqrt{x}$ est C^0 sur $[0,+\infty[$
mais pas de classe C^1 sur $[0,+\infty[$
car cette fonction n'est pas dérivable en 0

Ex 14 :

La représentat° graphique est celle de f'
f' existe sur $[-2,2]$ et est continue sur $[-2,2]$
donc f est de classe C^1 sur $[-2,2]$.

En revanche la représentat° graphique de f' présente en 0 un point anguleux
donc f' n'est pas dérivable en 0
$\Rightarrow$ f n'est pas de classe C^2 sur $[-2,2]$.

Ex 15:

1) Montrons que g est dérivable en 0 :

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin 1/x - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$$

$$= 0$$

car $\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$

donc cd par le thm des gendarmes

ainsi g est bien dérivable en 0 et $g'(0)=0$

pour $x \neq 0$ $\quad g'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} + x^2 \left(\frac{-1}{x^2} \cos \frac{1}{x} \right)$

$$= 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

ce terme n'admet pas de limite qd $x \to 0$

or qd $x \to 0$ $\frac{1}{x} \to \infty$