Étude de fonction et fonctions usuelles

Objectifs

- **Connaître et appliquer le plan d'étude d'une fonction.**
- **Connaître les fonctions usuelles**

1 Mener une étude de fonction

1. Déterminer **le domaine de définition** de f.
2. Déterminer **le domaine d'étude** de f : selon les propriétés de f il est possible d'étudier f sur un intervalle plus petit que le domaine de définition alors appelé domaine d'étude.

   - f est elle paire ou impaire ?

     Définition 1. Fonction paire
     Soit f une fonction définie sur un ensemble I de $\mathbb{R}$. On dit que f est une fonction paire lorsque :

     – I est symétrique par rapport à l'origine.

     – $\forall x \in I,\ f(-x) = f(x)$

     Exemple 1.
     Les fonctions suivantes sont-elles paires sur leur domaine de définition ?
     $f(x) = \dfrac{x^2 + \cos x + 1}{-|x| - 1}$; $g(x) = 2x + 2$

     Propriété 1.
     Une fonction est paire si et seulement si sa représentation graphique dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

     Exemple 2.
     Vérifier à l'aide d'un graphique la propriété précédente.

     Définition 2. Fonction impaire
     Soit f une fonction définie sur un ensemble I de $\mathbb{R}$. On dit que f est une fonction impaire lorsque :

     – I est symétrique par rapport à l'origine.

     – $\forall x \in I,\ f(-x) = -f(x)$

     Exemple 3.
     Les fonctions suivantes sont elles impaires sur leur domaine de définition ?
     $f(x) = \dfrac{-x^3 + \sin x}{x^2 + 1}$; $g(x) = 2x + 2$

Propriété 2.
Une fonction est impaire si et seulement si sa représentation graphique dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'origine.

Exemple 4.
Vérifier à l'aide d'un graphique la propriété précédente.

- f est elle péridodique ? Nous l'étudierons dans le paragraphe des fonctions trigonométriques.

3. Déterminer **les limites** aux bords du domaine de définition.
4. Déterminer **le domaine de dérivabilité**, calcul de la **dérivée** et dresser **le tableau de variations**. Préciser les valeurs importantes : les bornes du domaine d'étude, les points où la dérivée est nulle ou non définie.
5. Eléments graphiques remarquables

- **Les branches infinies :**
  On a une branche infinie si x ou $f(x)$ tendent vers $+\infty$ ou $-\infty$.
  - 1er cas : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$: asymptote verticale $x = x_0$
  - 2ème cas : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = y_0$: asymptote horizontale $y = y_0$
  - 3ème cas : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$. On étudie $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$
    (a) Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$: branche parabolique de direction asymptotique Oy (exemple : la fonction exp)
    (b) Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$: branche parabolique de direction asymptotique Ox (exemple : la fonction $\ln x$)
    (c) Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$: on étudie $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - ax$:
      i. Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - ax = b \in \mathbb{R}$: asymptote oblique d'équation $y = ax + b$
      ii. Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - ax = \pm\infty$: branche parabolique de direction asymptotique $y = ax$

  Exemple 5.
  Déterminer les branches infinies de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2 - 3x^2}{x + 3}$

- **Tangentes remarquables :**
  (a) Si la dérivée est nulle : tangente horizontale
  (b) Si la dérivée ou le taux de variation tend vers $+\infty$ ou $-\infty$: tangente verticale : point de non dérivabilité.
  (c) Demi-tangentes : obtenues en considérant f seulement à droite ou seulement à gauche en un point x_0

1.1 Fonctions majorées, minorées, bornées

Soit f une fonction de la variable réelle définie sur un domaine noté D.

Définition 3. *Majorant, borne supérieure et maximum.*
Soit f une fonction bornée sur un intervalle $[a, b]$.

- **Un** majorant de f sur $[a, b]$ est un réel M tel que pour tout x de $[a, b]$, $f(x) \leqslant M$.
- **La** borne supérieure de f sur $[a, b]$ est le plus petit des majorants. On le note $\underset{x\in[a;b]}{sup}\ f(x)$
- Le maximum de f sur $[a, b]$, est un réel M tel que pour tout x de $[a, b]$, $f(x) \leqslant M$ et il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $M = f(x_0)$. On le note $\underset{x\in[a;b]}{max} f(x)$

On définit de la même façon les notions de minorant, borne inférieure et minimum.

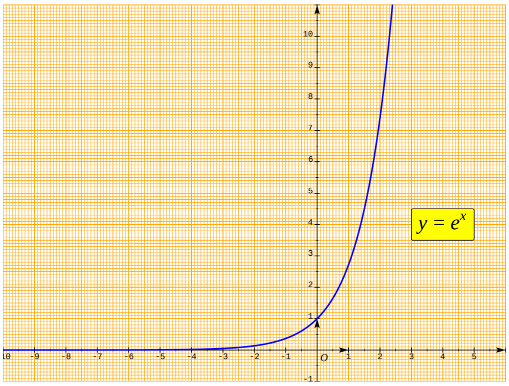
Exemple 6.
Les affirmations suivantes sont elles vraies ou fausses ?

1. Un majorant est un maximum.
2. Un maximum est un majorant.
3. Une fonction bornée admet toujours un maximum sur $[a, b]$.
4. Une fonction bornée admet toujours une borne supérieure sur $[a, b]$.

Exemple 7.
Démontrer que la fonction f_n définie sur $]0, 1]$ par $f(x) = -x^n \ln(x)$ et $f(0) = 0$ est majorée sur $[0, 1]$.

2 Exponentielles, logarithmes, puissances

2.1 Exponentielle



Définition 4.
Il existe une unique fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, appelée exponentielle, notée exp, dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \exp(0) = 1 \\ \exp'(x) = \exp(x),\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Par définition, exp est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Equation fonctionnelle

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \ : \begin{cases} \exp(x+y) = \exp(x).\exp(y) \\ \exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)} \end{cases}$$

On pose : $e = \exp(1)$ et on note $e^x = \exp(x)$.

Variations

$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0$ donc comme $\exp' = \exp$, alors exp est strictement croissante.

Limites aux bornes

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

La courbe de exp admet une asymptote horizontale en $-\infty$ d'équation $y = 0$ c'est à dire l'axe des abscisses.

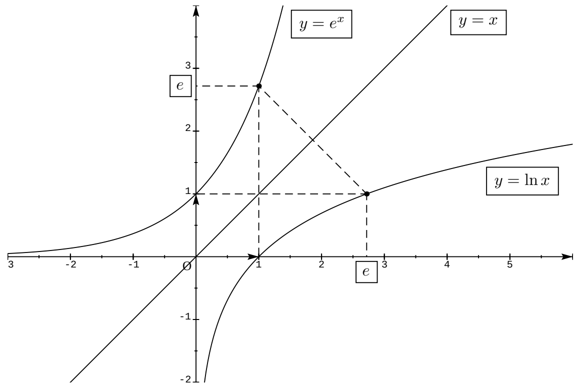
Croissances comparées

$$\begin{cases} \forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \\ \forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \lim\limits_{x\to-\infty} |x|^\alpha e^x = 0 \end{cases}$$

Limite à connaître

$$\lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

2.2 Logarithme népérien



Définition 5.
La fonction logarithme népérien, notée ln est la fonction réciproque de la fonction exp car exp est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]0;+\infty[$. La fonction ln est donc définie de $]0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

Variations
ln est de même sens de variations que exp ainsi ln est continue, dérivable et strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
Dérivée

$$\forall x > 0, \ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln x)} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

Limites aux bornes

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

La courbe de ln admet une asymptote verticale en 0.

Equation fonctionnelle

$$\forall x, y > 0 \ : \ \begin{cases} \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \\ \ln \frac{1}{x} = -\ln x \end{cases}$$

Croissances comparées

$$\begin{cases} \forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \\ \forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha \ln x = 0 \end{cases}$$

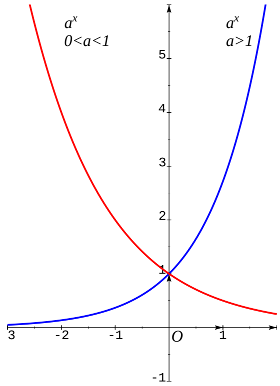
Limite à connaître

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Exemple 8. Étudier la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + e^x)$

2.3 Fonctions exponentielles et logarithmes de base quelconque

2.3.1 Fonctions exponentielles de base quelconque

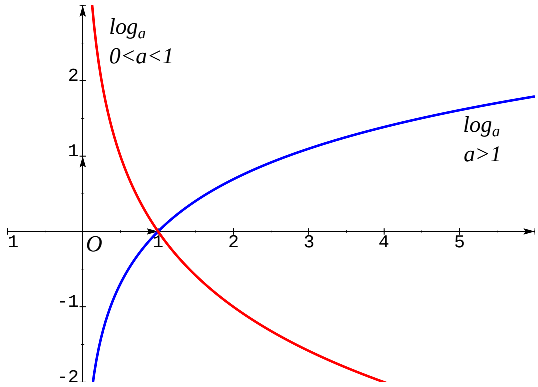


Définition 6.
Soit $a > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit l'exponentielle de base a par :

$$a^x = \exp(x \ln a) = e^{x \ln a}$$

Ainsi, l'étude d'une exponentielle de base a se ramène à celle d'une exponentielle classique du type $e^{\alpha x}$.

2.3.2 Fonctions logarithmes de base quelconque



Définition 7.
Soit $a > 0$ et $a \neq 1$. Pour tout $x > 0$, on définit le logarithme de base a par :

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

De même, l'étude d'une fonction logarithme de base a se ramène, à un facteur multiplicatif près à celle de la fonction ln.

2.3.3 Fonction logarithme décimal

Une fonction logarithme de base 10 est appelée logarithme décimal, il est noté log. Cette fonction est la fonction réciproque de la fonction exponentielle de base 10 : $x \to 10^x$. Elles donc utilisée lorsqu'on manipule des puissances de 10.

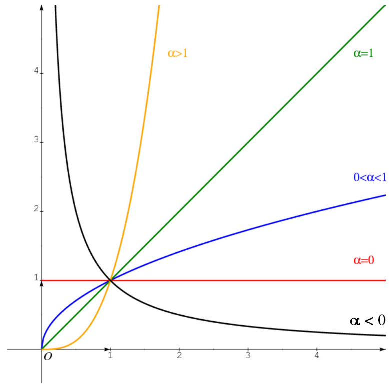
Exemple 9. Par exemple, en chimie, nous avons la formule : $[H^+] = 10^{-PH}$. En déduire PH en fonction de la concentration en $[H^+]$.

2.4 Fonctions puissances

Définition 8.
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit :

$$f_\alpha : \begin{pmatrix} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^\alpha \end{pmatrix}$$

avec $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.
Ainsi, là aussi, on se ramène à l'étude d'une exponentielle classique, sauf dans les cas α entier naturel (fonction puissance classique), entier relatif négatif (fonction inverse d'une fonction puissance classique), rationnel et on a : $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$.



2.5 Croissances comparées

Soient $\alpha > 0$ et $a, b > 1$: on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\log_b x}{x^\alpha} = 0 \qquad \lim_{x \to 0} x^\alpha \log_b x = 0$$

On résume cela ainsi : en $+\infty$:

$$\log_b x \ll x^\alpha \ll a^x$$

3 Fonctions circulaires

3.1 Fonction périodique

Définition 9.
Soit T un réel, et f une fonction définie sur un ensemble I de $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction f est une fonction T périodique, ou de période T, lorsque :

- $\forall x \in I,\ x + T \in I.$
- $\forall x \in I,\ f(x+T) = f(x)$

Exemple 10.
Soit f la fonction définie par $f(t) = \cos(\omega t)$ pour t réel. Montrer que f est une fonction de période $\frac{2\pi}{\omega}$. ω est appelé pulsation en physique.

Proposition 1.
Soit a, b, et ω trois réels. Alors il existe trois réels ϕ, ϕ' et A tels que :

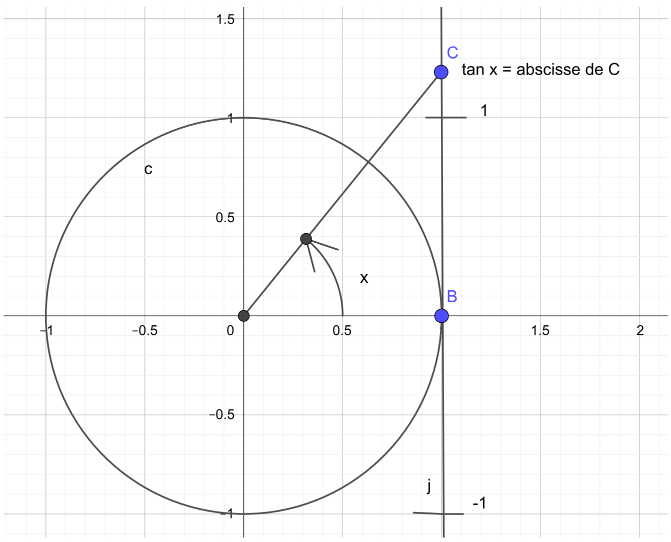
$$\text{pour tout réel } t : a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) = A\sin(\omega t + \phi) = A\cos(\omega t + \phi')$$

On a : $A = \sqrt{a^2+b^2}$, $\tan\phi = \frac{a}{b}$ et $\tan\phi' = -\frac{b}{a}$

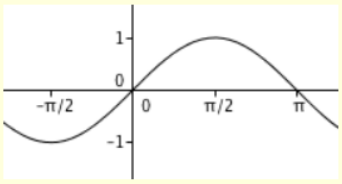
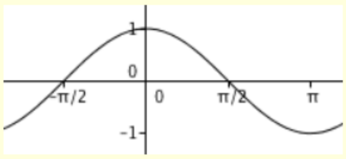
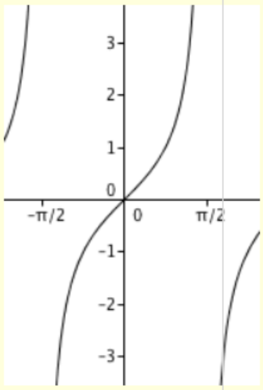
La propriété précédente se traduit de la façon suivante en physique : le somme de deux signaux sinusoïdaux de même pulsation (et donc de même période) est un signal sinusoïdal de même pulsation (et donc de même période) avec un déphasage de ϕ.

Exemple 11.
Démontrer la propriété précédente, puis écrire sous la forme $A\sin(\omega x+\phi)$ l'expression $\cos 2x + \sin 2x$.

3.2 Le cercle trigonométrique



3.3 Fonctions trigonométriques usuelles

Nom	sinus	cosinus	tangente
Notation	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
Départ et arrivée	$\mathbb{R} \to [-1, 1]$	$\mathbb{R} \to [-1, 1]$	$\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$
Parité	Impaire	Paire	Impaire
Période	2π	2π	π
Dérivée	$\cos x$	$-\sin x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
Monotonie	Croissante sur $[-\pi/2, \pi/2]$	Décroissante sur $[0, \pi]$	Croissante sur $]-\pi/2, \pi/2[$
Courbe représentative			

Exemple 12.
Étudier la fonction $f : x \mapsto \tan x - \dfrac{1}{\tan x}$

3.3.1 Valeurs remarquables

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(\theta)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	

3.3.2 Formules de trigonométrie

$\cos(-x) = \cos(x)$	$\sin(-x) = -\sin(x)$
$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$	$\sin(\pi - x) = \sin(x)$
$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$	$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$	$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$
$\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin(x)$	$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x)$

3.3.3 Formules de Somme

- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a)$

3.3.4 Formules de Linéarisation

- $\cos^2(a) = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$
- $\sin^2(a) = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$
- $\sin(a)\cos(a) = \dfrac{1}{2}\sin(2a)$

3.3.5 Résoudre une équation trigonométrique

Résoudre une équation du type $\cos(x) = \cos(a)$

$$\cos(a) = \cos(b) \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (1) \\ \text{ou} \\ a = -b + 2k'\pi, \quad k' \in \mathbb{Z} \quad (2) \end{cases}$$

Résoudre une équation du type $\sin(x) = \sin(a)$

$$\sin(a) = \sin(b) \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (1) \\ \text{ou} \\ a = \pi - b + 2k'\pi, \quad k' \in \mathbb{Z} \quad (2) \end{cases}$$

Résoudre une équation du type $\tan(x) = \tan(a)$

$$\tan(a) = \tan(b) \Leftrightarrow a = b + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

4 Fonctions hyperboliques

4.1 Cosinus et sinus hyperboliques

Définition 10. Par analogie avec les formules d'Euler, on appelle cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$\begin{cases} \text{ch} : x \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \text{sh} : x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$$

Continuité, dérivabilité
ch et sh sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$

Compléter les propriétés de ch et sh.

Parité

- La fonction ch est une fonction ....
- la fonction sh est une fonction ....

Dérivée

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \text{ch}'(x) = \\ \text{sh}'(x) = \end{cases}$$

Tableau de variations

x	
$\text{ch}\, x$	

x	
$\text{sh}\, x$	

Signe
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\text{ch}(x)$ ....
$\text{sh}(x)$ change de signe en ....

Trigonométrie hyperbolique
Il existe de nombreuses formules liant ch et sh mais celle-ci est **fondamentale** :

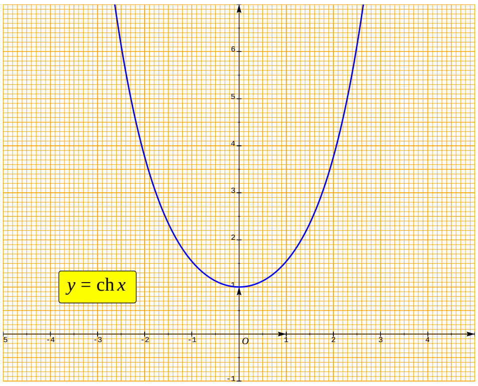
$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$$

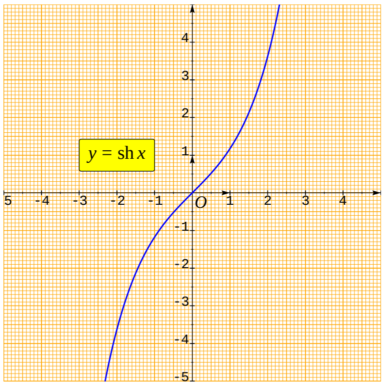
Exemple 13. Démontrer l'égalité précédente.

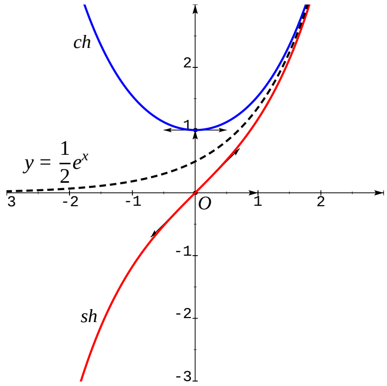
Comparaison
Comme $\text{ch}\, x - \text{sh}\, x = e^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{ch}\, x - \text{sh}\, x = 0$. Les courbes des fonctions ch, sh et $x \mapsto \dfrac{1}{2}e^x$ sont dites asymptotes.

Proposition 2.
$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(2x) = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$ et $\operatorname{sh}(2x) = 2 \operatorname{ch} x . \operatorname{sh} x$

Exemple 14. Montrer la propriété précédente.







4.2 Tangente hyperbolique

Définition 11. On appelle tangente hyperbolique la fonction th définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

Continuité, dérivabilité
La fonction th est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

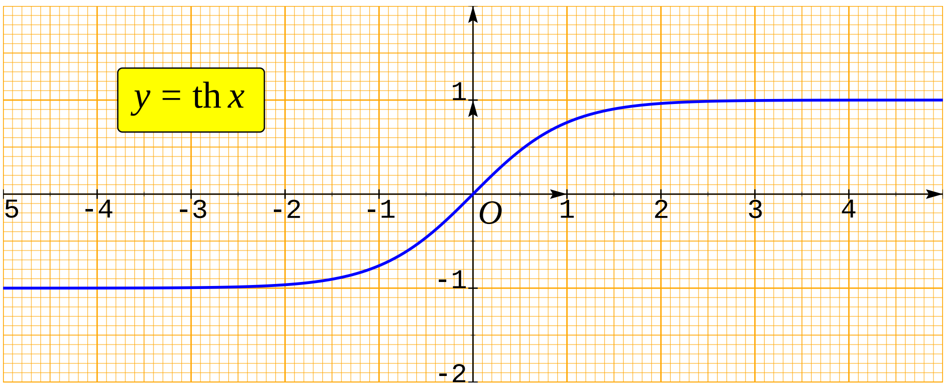
Parité
La fonction th est ....

Dérivée

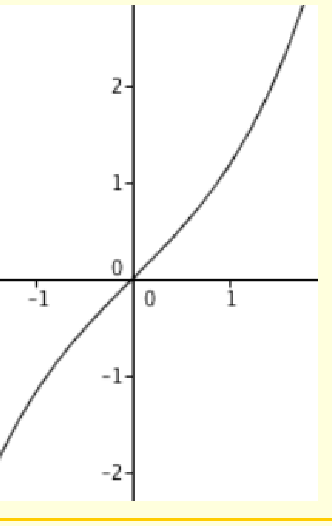
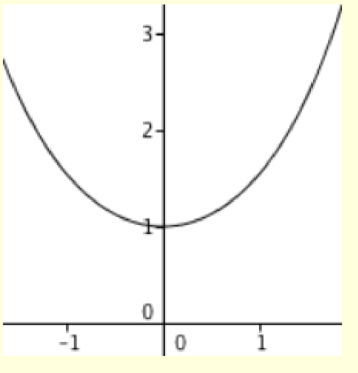
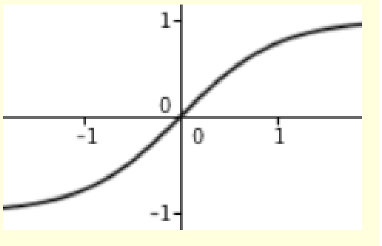
$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{th}'(x) = \text{..........................}$$

Tableau de variations

x	
th x	



4.2.1 Résumé des fonctions hyperboliques

Nom	sinus hyperbolique	cosinus hyperbolique	tangente hyperbolique
Définition	$\mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\mathrm{th}x = \frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
Départ et arrivée	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$\mathbb{R} \to [1, +\infty[$	$\mathbb{R} \to]-1, 1[$
Parité	Impaire	Paire	Impaire
Dérivée	$\mathrm{ch}x$	$\mathrm{sh}x$	$1 - \mathrm{th}^2 x = \frac{1}{\mathrm{ch}^2\, x}$
Monotonie	Croissante	Croissante sur $\mathbb{R}_+$	Croissante
Limites	$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{sh}x = +\infty$	$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{ch}x = +\infty$	$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{th}x = 1$
Courbe représentative			
Formules	$\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$		

5 Manipulation de graphes

5.1 Introduction

partie A) Expérimentation

1) Dessiner le graphe de la fonction exponentielle.
2) Dessiner sur le papier les graphes des quatre fonctions suivantes : $-\exp(x)$; $\exp(x)+1$; $\exp(x)-1$; $2\exp(x)$.
3) Par quelles transformations géométriques passe-t-on du graphe de l'exponentielle aux graphes tracés ?
4) Mêmes questions pour les quatre fonctions $\exp(-x)$; $\exp(x+1)$; $\exp(x-1)$; $\exp(2x)$.

partie B) Énoncé des correspondances

Relier chaque formule à la transformation géométrique qui lui correspond, en la précisant si possible.

(a) $-f(x)$;	(1) translation vers le haut ;
(b) $f(x)+1$;	(2) translation vers le bas ;
(c) $f(x)-1$;	(3) translation vers la gauche ;
(d) $2f(x)$;	(4) translation vers la droite ;
(e) $f(-x)$;	(5) symétrie par rapport à l'axe des abscisses ;
(f) $f(x+1)$;	(6) symétrie par rapport à l'axe des ordonnées ;
(g) $f(x-1)$;	(7) dilatation d'un facteur 2 dans le sens vertical ;
(h) $f(2x)$.	(8) dilatation d'un facteur 1/2 dans le sens horizontal.

partie C)

1) Quelle formule correspond à une homothétie de rapport 2, centrée en l'origine ?
2) À une rotation d'un demi-tour, centrée en l'origine ?

5.2 Bilan

Certaines fonctions ont leur expression analytique construites à partir d'une fonction usuelle. Ces fonctions sont dites associées à une fonction de référence. L'étude de ce type de relation fonctionnelle permet d'obtenir rapidement et sans peine leurs représentations graphiques.
Soient f et g deux fonctions numériques, définies respectivement sur D_f et D_g, de courbes représentatives respectives C_f et C_g dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

5.2.1 Translations

Théorème 1 (Translation verticale)**.**
Si $g(x) = f(x) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$
Alors $\mathcal{C}_g$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par la translation verticale de vecteur $k\vec{j}$.

Théorème 2 (Translation horizontale)**.**
Si $g(x) = f(x+k)$ avec $k \in \mathbb{R}$
Alors $\mathcal{C}_g$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par la translation horizontale de vecteur $-k\vec{i}$.

5.2.2 symétries

Théorème 3 (Symétrie d'axe O_x)**.**
Si $g(x) = -f(x)$
Alors $\mathcal{C}_g$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par la symétrie orthogonale d'axe O_x.

Théorème 4 (Symétrie d'axe O_y)**.**
Si $g(x) = f(-x)$
Alors $\mathcal{C}_g$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par la symétrie orthogonale d'axe O_y.

Théorème 5 (Symétrie centrale de centre O)**.**
Si $g(x) = -f(-x)$
Alors $\mathcal{C}_g$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par la symétrie centrale de centre O.

5.2.3 Dilatation

Théorème 6 (Dilatation verticale)**.**
Si $g(x) = k.f(x)$ avec $k > 0$
Alors C_g est l'image de C_f par une dilatation verticale de facteur k.

Théorème 7 (Dilatation horizontale)**.**
Si $g(x) = f(k.x)$ avec $k > 0$
Alors C_g est l'image de C_f par une dilatation horizontale de facteur $\frac{1}{k}$.

Théorème 8 (Homothétie de centre O et de rapport k)**.**
Si $g(x) = k.f(\frac{1}{k}.x)$ avec $k > 0$
Alors C_g est l'image de C_f par une homothétie de centre O et de rapport k.

Exercices

6 TD1-2-3

Exercice 1.
Étudier les fonctions

1. $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$
2. $U(r) = \dfrac{r^2 - R}{r + R}$ où R est une constante non nulle
3. $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$
4. $f : x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$

Exercice 2.

Préciser si les fonctions suivantes sont majorées, minorées et / ou bornées sur l'intervalle I indiqué :

1. $f_n(x) = ne^{-n^2x^2}$ sur $I = [2, +\infty[$
2. $f_n(x) = \dfrac{1}{(1 + x^2)^n}$ sur $I = [3, +\infty[$

7 TD4

Exercice 3.

Calculer les valeurs exactes des expressions suivantes
$\cos(\dfrac{-3\pi}{4})$ $\cos(\dfrac{5\pi}{6})$ $\sin(\dfrac{123\pi}{6})$ $\cos(\dfrac{\pi}{12})$ $\sin(\dfrac{\pi}{12})$

Exercice 4.
Donner la plus petite période des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \sin(3x)$
2. $f_1(x) = \cos(\omega x + \dfrac{\pi}{4})$
3. $f_1(x) = \sin(3x) - \cos(\dfrac{2x}{3})$
4. $f_1(x) = \dfrac{\tan(4x)}{\tan(2x)}$

Exercice 5.
Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$ et $[0; 2\pi]$.

1. $\sin(2x) = \sin(\dfrac{\pi}{3})$
2. $\cos(3x + \pi) = \cos(\dfrac{\pi}{2})$
3. $\tan(3x) = 1$
4. $\sin x + \sin(2x) = 0$

Exercice 6.
Résoudre les inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$.

1. $\sin(2x) \leqslant \dfrac{1}{2}$
2. $\cos(3x+\pi) > -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
3. $\tan(3x) > 1$

8 TD5-6-début7

Exercice 7.
Étudier la fonction suivante :

1. $h : x \mapsto \text{ch}\left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right)$

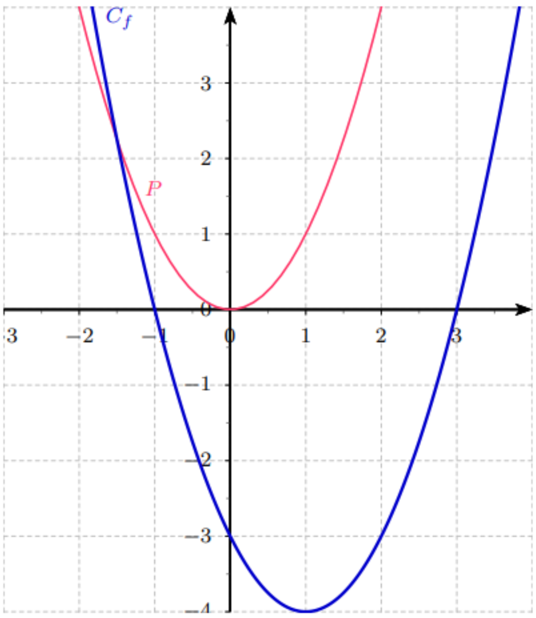
Exercice 8.
Considéron la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\,\text{sh}(\dfrac{1}{x})$

1. Étudier la parité de f.
2. Étudier les limites de f.
3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et prouver que $f'(x) = ch(\dfrac{1}{x})(th(\dfrac{1}{x}) - \dfrac{1}{x})$.
4. Justifier que pour tout $y \geqslant 0 \quad th(y) \leqslant y$, en déduire le tabeau de variations de f et la courbe représentative de f.

Exercice 9.
Écrire $\text{ch}(x)$ en fonction de $\text{sh}(x)$ et $\text{sh}(2x)$.
Simplifier $u_n = \displaystyle\prod_{p=1}^{n} \text{ch}\left(\frac{1}{2^p}\right)$, en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

9 fin TD7-TD8

Exercice 10.
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Voici sa représentation graphique dans un repère cartésien, accompagnée de la parabole d'équation $y = x^2$:



- Par quelle transformation géométrique semble-t-on obtenir C_f à partir de P ?
- Le démontrer par le calcul.

Exercice 11.

1. Donner une représentation graphique pour la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{si } x \in [-3,-2] \\ 1 & \text{si } x \in [-2,1] \\ -x+2 & \text{si } x \in [1,5] \end{cases}$$

2. Soit h la fonction définie par $h(x) = -f(x)$.
   Préciser la transformation associée puis donner le graphe et l'expression de h.
3. Même question pour $i(x) = f(-x)$
4. Même question pour $g(x) = f(x+1) + 2$

Exercice 12.

1. Tracer le plus rapidement possible les graphes des applications suivantes. On commencera par tracer le graphe de la fonction élémentaire utilisée (sinus, cosinus, *etc.*).
   $f_1(x) = \sin(x) + 1$; $f_2(x) = -\cos(x)$; $f_3(x) = \ln(-x)$; $f_4(x) = 2\sqrt{x}$; $f_5(x) = \sin(2x)$; $f_6(x) = \sqrt{x+1}$
2. Plus difficile : $f_7(x) = 2\sin(x) + 1$; $f_8(x) = \ln(2x+1)$; $f_9(x) = \sin(2x) + 1$; $f_{10}(x) = 2\ln(x+1)$.