

Étude de fonction et fonctions usuelles

Objectifs

- Connaître et appliquer le plan d'étude d'une fonction.
- Connaître les fonctions usuelles

1 Mener une étude de fonction

1. Déterminer **le domaine de définition** de f .
2. Déterminer **le domaine d'étude** de f : selon les propriétés de f il est possible d'étudier f sur un intervalle plus petit que le domaine de définition alors appelé domaine d'étude.
 - f est elle paire ou impaire ?

Définition 1. Fonction paire

Soit f une fonction définie sur un ensemble I de $\mathbb{R}$. On dit que f est une fonction paire lorsque :

- I est symétrique par rapport à l'origine.
- $\forall x \in I, f(-x) = f(x)$

Exemple 1.

Les fonctions suivantes sont-elles paires sur leur domaine de définition ?

$$f(x) = \frac{x^2 + \cos x + 1}{-|x| - 1} ; g(x) = 2x + 2$$

Propriété 1.

Une fonction est paire si et seulement si sa représentation graphique dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Exemple 2.

Vérifier à l'aide d'un graphique la propriété précédente.

Définition 2. Fonction impaire

Soit f une fonction définie sur un ensemble I de $\mathbb{R}$. On dit que f est une fonction impaire lorsque :

- I est symétrique par rapport à l'origine.
- $\forall x \in I, f(-x) = -f(x)$

Exemple 3.

Les fonctions suivantes sont elles impaires sur leur domaine de définition ?

$$f(x) = \frac{-x^3 + \sin x}{x^2 + 1} ; g(x) = 2x + 2$$

Propriété 2.

Une fonction est impaire si et seulement si sa représentation graphique dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'origine.

Exemple 4.

Vérifier à l'aide d'un graphique la propriété précédente.

- f est elle périodique ? Nous l'étudierons dans le paragraphe des fonctions trigonométriques.
3. Déterminer **les limites** aux bords du domaine de définition.
 4. Déterminer **le domaine de dérivabilité**, calcul de la **dérivée** et dresser **le tableau de variations**. Préciser les valeurs importantes : les bornes du domaine d'étude, les points où la dérivée est nulle ou non définie.
 5. Eléments graphiques remarquables

- **Les branches infinies :**

On a une branche infinie si x ou $f(x)$ tendent vers $+\infty$ ou $-\infty$.

- 1er cas : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$: asymptote verticale $x = x_0$
- 2ème cas : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = y_0$: asymptote horizontale $y = y_0$
- 3ème cas : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$. On étudie $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$
 - (a) Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$: branche parabolique de direction asymptotique Oy (exemple : la fonction $\exp$)
 - (b) Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$: branche parabolique de direction asymptotique Ox (exemple : la fonction $\ln x$)
 - (c) Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$: on étudie $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - ax$:
 - i. Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - ax = b \in \mathbb{R}$: asymptote oblique d'équation $y = ax + b$
 - ii. Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - ax = \pm\infty$: branche parabolique de direction asymptotique $y = ax$

Exemple 5.

Déterminer les branches infinies de la fonction f définie par $f(x) = \frac{2 - 3x^2}{x + 3}$

- **Tangentes remarquables :**

- (a) Si la dérivée est nulle : tangente horizontale
- (b) Si la dérivée ou le taux de variation tend vers $+\infty$ ou $-\infty$: tangente verticale : point de non dérivabilité.
- (c) Demi-tangentes : obtenues en considérant f seulement à droite ou seulement à gauche en un point x_0

1.1 Fonctions majorées, minorées, bornées

Soit f une fonction de la variable réelle définie sur un domaine noté D .

Définition 3. *Majorant, borne supérieure et maximum.*

Soit f une fonction bornée sur un intervalle $[a, b]$.

- Un majorant de f sur $[a, b]$ est un réel M tel que pour tout x de $[a, b]$, $f(x) \leq M$.
- La borne supérieure de f sur $[a, b]$ est le plus petit des majorants. On le note $\sup_{x \in [a; b]} f(x)$
- Le maximum de f sur $[a, b]$, est un réel M tel que pour tout x de $[a, b]$, $f(x) \leq M$ et il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $M = f(x_0)$. On le note $\max_{x \in [a; b]} f(x)$

On définit de la même façon les notions de minorant, borne inférieure et minimum.

Exemple 6.

Les affirmations suivantes sont elles vraies ou fausses ?

1. Un majorant est un maximum.
2. Un maximum est un majorant.
3. Une fonction bornée admet toujours un maximum sur $[a, b]$.
4. Une fonction bornée admet toujours une borne supérieure sur $[a, b]$.

Exemple 7.

Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{|\sin(x)|}{2 + \cos(x)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

2 Exponentielles, logarithmes, puissances

2.1 Exponentielle

Définition 4.

Il existe une unique fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, appelée exponentielle, notée $\exp$, dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

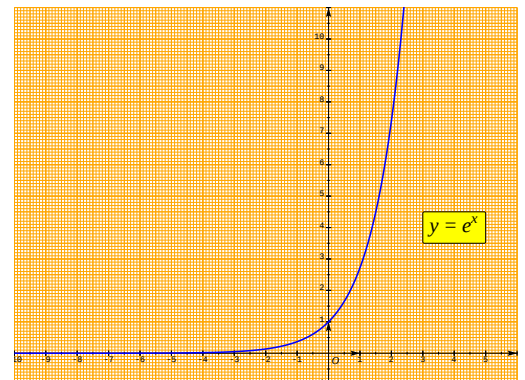
$$\begin{cases} \exp(0) = 1 \\ \exp'(x) = \exp(x), \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Par définition, $\exp$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Equation fonctionnelle

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \begin{cases} \exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \\ \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \end{cases}$$

On pose : $e = \exp(1)$ et on note $e^x = \exp(x)$.



Variations

$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0$ donc comme $\exp' = \exp$, alors $\exp$ est strictement croissante.

Limites aux bornes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

La courbe de $\exp$ admet une asymptote horizontale en $-\infty$ d'équation $y = 0$ c'est à dire l'axe des abscisses.

Croissances comparées

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \\ \forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha e^x = 0 \end{array} \right.$$

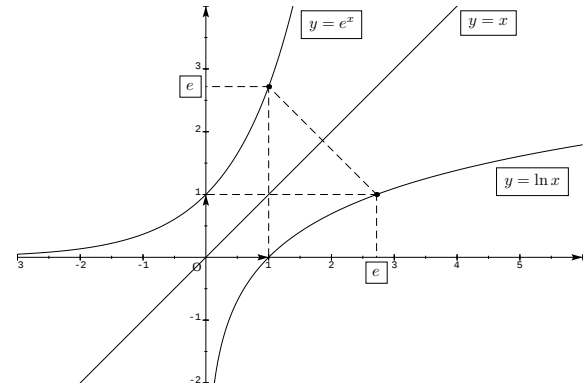
Limite à connaître

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

2.2 Logarithme népérien

Définition 5.

La fonction logarithme népérien, notée $\ln$ est la fonction réciproque de la fonction $\exp$ car $\exp$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]0; +\infty[$. La fonction $\ln$ est donc définie de $]0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.



Variations

$\ln$ est de même sens de variations que $\exp$ ainsi $\ln$ est continue, dérivable et strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Dérivée

$$\forall x > 0, \ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln x)} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

Limites aux bornes

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

La courbe de $\ln$ admet une asymptote verticale en 0.

Equation fonctionnelle

$$\forall x, y > 0 : \begin{cases} \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \\ \ln \frac{1}{x} = -\ln x \end{cases}$$

Croissances comparées

$$\begin{cases} \forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \\ \forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0 \end{cases}$$

Limite à connaître

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Exemple 8. Étudier la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + e^x)$

2.3 Fonctions exponentielles et logarithmes de base quelconque

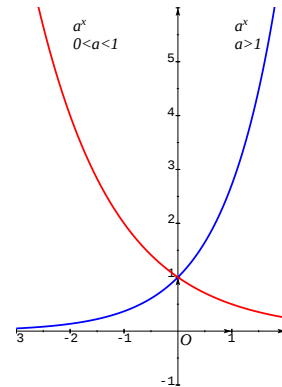
2.3.1 Fonctions exponentielles de base quelconque

Définition 6.

Soit $a > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit l'exponentielle de base a par :

$$a^x = \exp(x \ln a) = e^{x \ln a}$$

Ainsi, l'étude d'une exponentielle de base a se ramène à celle d'une exponentielle classique du type $e^{\alpha x}$.



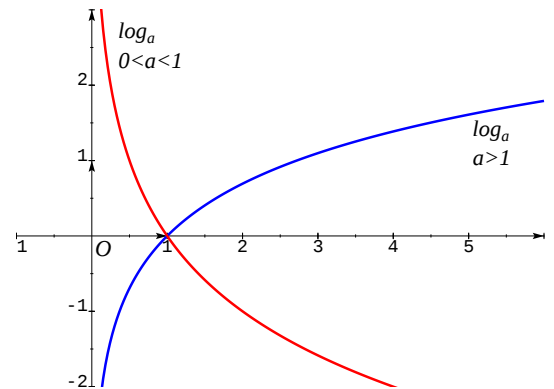
2.3.2 Fonctions logarithmes de base quelconque

Définition 7.

Soit $a > 0$ et $a \neq 1$. Pour tout $x > 0$, on définit le logarithme de base a par :

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

De même, l'étude d'une fonction logarithme de base a se ramène, à un facteur multiplicatif près à celle de la fonction $\ln$.



2.3.3 Fonction logarithme décimal

Une fonction logarithme de base 10 est appelée logarithme décimal, il est noté $\log$. Cette fonction est la fonction réciproque de la fonction exponentielle de base 10 : $x \rightarrow 10^x$. Elles donc utilisée lorsqu'on manipule des puissances de 10.

Exemple 9. Par exemple, en chimie, nous avons la formule : $[H^+] = 10^{-PH}$. En déduire PH en fonction de la concentration en $[H^+]$.

2.4 Fonctions puissances

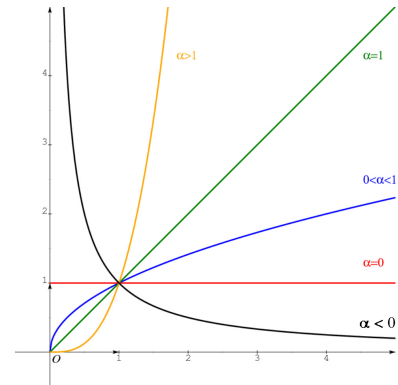
Définition 8.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit :

$$f_\alpha : \left(\begin{array}{c} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^\alpha \end{array} \right)$$

avec $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.

Ainsi, là aussi, on se ramène à l'étude d'une exponentielle classique, sauf dans les cas α entier naturel (fonction puissance classique), entier relatif négatif (fonction inverse d'une fonction puissance classique), rationnel et on a : $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$.



2.5 Croissances comparées

Soient $\alpha > 0$ et $a, b > 1$: on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_b x}{x^\alpha} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \log_b x = 0$$

On résume cela ainsi : en $+\infty$:

$$\log_b x \ll x^\alpha \ll a^x$$

3 Fonctions circulaires

3.1 Fonction périodique

Définition 9.

Soit T un réel, et f une fonction définie sur un ensemble I de $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction f est une fonction T périodique, ou de période T , lorsque :

- $\forall x \in I, x + T \in I$.
- $\forall x \in I, f(x + T) = f(x)$

Exemple 10.

Soit f la fonction définie par $f(t) = \cos(\omega t)$ pour t réel. Montrer que f est une fonction de période $\frac{2\pi}{\omega}$. ω est appelé pulsation en physique.

Proposition 1.

Soit a, b , et ω trois réels. Alors il existe trois réels ϕ, ϕ' et A tels que :

$$\text{pour tout réel } t : a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) = A \sin(\omega t + \phi) = A \cos(\omega t + \phi')$$

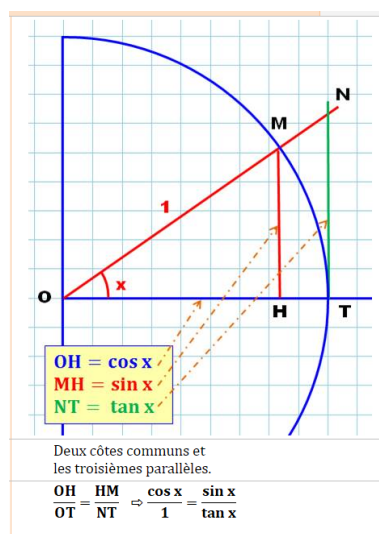
$$\text{On a : } A = \sqrt{a^2 + b^2}, \tan \phi = \frac{a}{b} \text{ et } \tan \phi' = -\frac{b}{a}$$

La propriété précédente se traduit de la façon suivante en physique : le somme de deux signaux sinusoïdaux de même pulsation (et donc de même période) est un signal sinusoïdal de même pulsation (et donc de même période) avec un déphasage de ϕ .

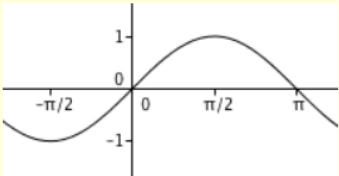
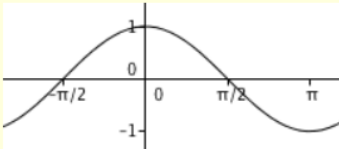
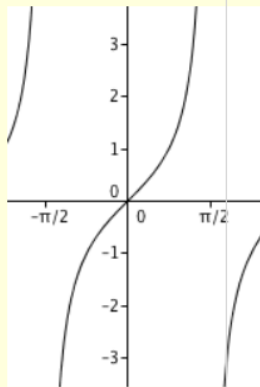
Exemple 11.

Démontrer la propriété précédente, puis écrire sous la forme $A \sin(\omega x + \phi)$ l'expression $\cos 2x + \sin 2x$.

3.2 Le cercle trigonométrique



3.3 Fonctions trigonométriques usuelles

Nom	sinus	cosinus	tangente
Notation	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
Départ et arrivée	$\mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$	$\mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$
Parité	Impaire	Paire	Impaire
Période	2π	2π	π
Dérivée	$\cos x$	$-\sin x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
Monotonie	Croissante sur $[-\pi/2, \pi/2]$	Décroissante sur $[0, \pi]$	Croissante sur $]-\pi/2, \pi/2[$
Courbe représentative			

Exemple 12.

Étudier la fonction $f : x \mapsto \tan x - \frac{1}{\tan x}$

3.3.1 Valeurs remarquables

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(\theta)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	

3.3.2 Formules de trigonométrie

$\cos(-x) = \cos(x)$	$\sin(-x) = -\sin(x)$
$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$	$\sin(\pi - x) = \sin(x)$
$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$	$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$	$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$
$\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin(x)$	$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x)$

3.3.3 Formules de Somme

- $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a + b) = \cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a)$

3.3.4 Formules de Linéarisation

- $\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$
- $\sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$
- $\sin(a)\cos(a) = \frac{1}{2}\sin(2a)$

3.3.5 Résoudre une équation trigonométrique

Résoudre une équation du type $\cos(x) = \cos(a)$

$$\cos(a) = \cos(b) \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \quad (1) \\ \text{ou} \\ a = -b + 2k'\pi, & k' \in \mathbb{Z} \quad (2) \end{cases}$$

Résoudre une équation du type $\sin(x) = \sin(a)$

$$\sin(a) = \sin(b) \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \quad (1) \\ \text{ou} \\ a = \pi - b + 2k'\pi, & k' \in \mathbb{Z} \quad (2) \end{cases}$$

Résoudre une équation du type $\tan(x) = \tan(a)$

$$\tan(a) = \tan(b) \Leftrightarrow a = b + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

4 Fonctions hyperboliques

4.1 Cosinus et sinus hyperboliques

Définition 10. Par analogie avec les formules d'Euler, on appelle cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$\begin{cases} \text{ch} : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \text{sh} : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$$

Continuité, dérivabilité

ch et sh sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$

Compléter les propriétés de ch et sh.

Parité

- La fonction ch est une fonction
- la fonction sh est une fonction

Dérivée

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \text{ch}'(x) = \\ \text{sh}'(x) = \end{cases}$$

Tableau de variations

x	
ch x	

x	
sh x	

Signe

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\text{ch}(x)$

$\text{sh}(x)$ change de signe en

Trigonométrie hyperbolique

Il existe de nombreuses formules liant ch et sh mais celle-ci est **fondamentale** :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$$

Exemple 13. Démontrer l'égalité précédente.

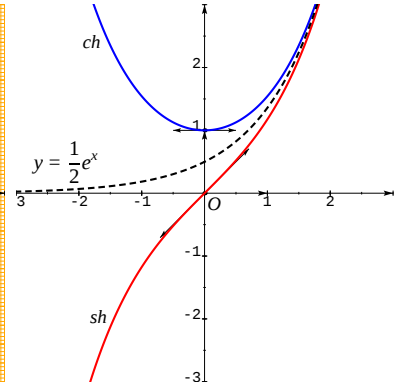
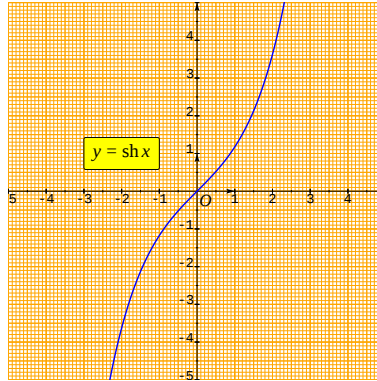
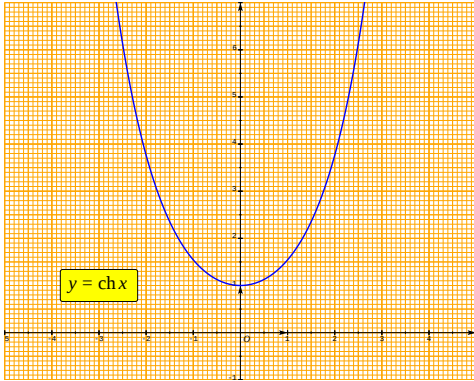
Comparaison

Comme $\text{ch} x - \text{sh} x = e^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{ch} x - \text{sh} x = 0$. Les courbes des fonctions ch, sh et $x \mapsto \frac{1}{2}e^x$ sont dites asymptotes.

Proposition 2.

$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(2x) = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$ et $\operatorname{sh}(2x) = 2 \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} x$

Exemple 14. Montrer la propriété précédente.



4.2 Tangente hyperbolique

Définition 11. On appelle tangente hyperbolique la fonction th définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

Continuité, dérivabilité

La fonction th est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Parité

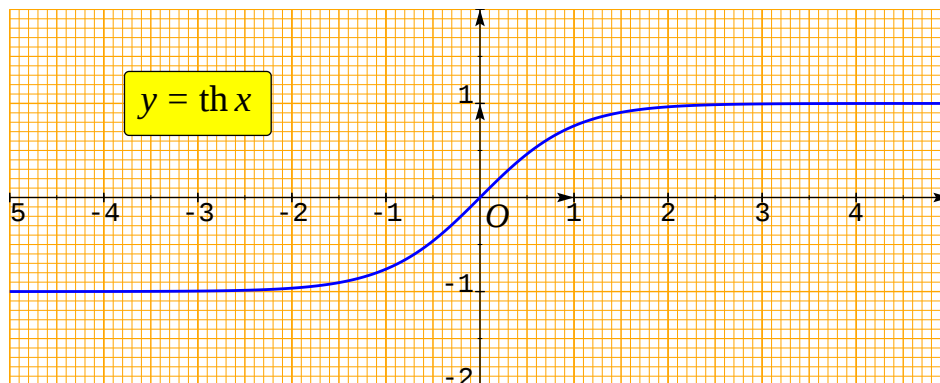
La fonction th est

Dérivée

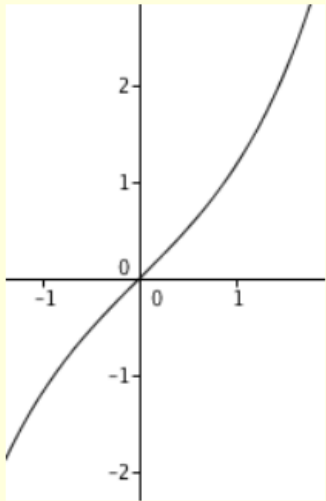
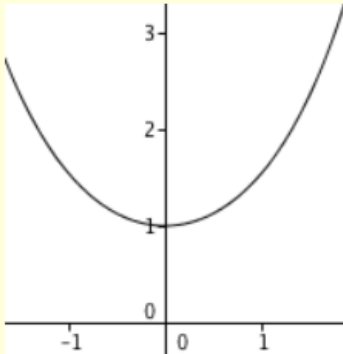
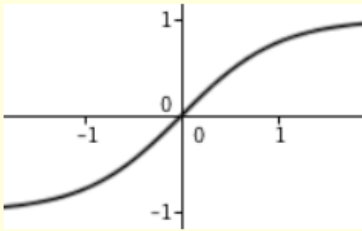
$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{th}'(x) = \dots\dots\dots$$

Tableau de variations

x	
$\operatorname{th} x$	



4.2.1 Résumé des fonctions hyperboliques

Nom	sinus hyperbolique	cosinus hyperbolique	tangente hyperbolique
Définition	$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
Départ et arrivée	$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	$\mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty[$	$\mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$
Parité	Impaire	Paire	Impaire
Dérivée	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
Monotonie	Croissante	Croissante sur $\mathbb{R}_+$	Croissante
Limites	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sh} x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{ch} x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{th} x = 1$
Courbe représentative			
Formules	$\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$		

5 Manipulation de graphes

5.1 Introduction

partie A) Expérimentation

- 1) Dessiner le graphe de la fonction exponentielle.
- 2) Dessiner sur le papier les graphes des quatre fonctions suivantes : $-\exp(x)$; $\exp(x) + 1$; $\exp(x) - 1$; $2\exp(x)$.
- 3) Par quelles transformations géométriques passe-t-on du graphe de l'exponentielle aux graphes tracés ?
- 4) Mêmes questions pour les quatre fonctions $\exp(-x)$; $\exp(x+1)$; $\exp(x-1)$; $\exp(2x)$.

partie B) Énoncé des correspondances

Relier chaque formule à la transformation géométrique qui lui correspond, en la précisant si possible.

- | | |
|------------------|--|
| (a) $-f(x)$; | (1) translation vers le haut ; |
| (b) $f(x) + 1$; | (2) translation vers le bas ; |
| (c) $f(x) - 1$; | (3) translation vers la gauche ; |
| (d) $2f(x)$; | (4) translation vers la droite ; |
| (e) $f(-x)$; | (5) symétrie par rapport à l'axe des abscisses ; |
| (f) $f(x + 1)$; | (6) symétrie par rapport à l'axe des ordonnées ; |
| (g) $f(x - 1)$; | (7) dilatation d'un facteur 2 dans le sens vertical ; |
| (h) $f(2x)$. | (8) dilatation d'un facteur 1/2 dans le sens horizontal. |

- partie C)
- 1) Quelle formule correspond à une homothétie de rapport 2, centrée en l'origine ?
 - 2) À une rotation d'un demi-tour, centrée en l'origine ?

5.2 Bilan

Certaines fonctions ont leur expression analytique construites à partir d'une fonction usuelle. Ces fonctions sont dites associées à une fonction de référence. L'étude de ce type de relation fonctionnelle permet d'obtenir rapidement et sans peine leurs représentations graphiques.

Soient f et g deux fonctions numériques, définies respectivement sur D_f et D_g , de courbes représentatives respectives C_f et C_g dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

5.2.1 Translations

Théorème 1 (Translation verticale).

Si $g(x) = f(x) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

Alors C_g est l'image de C_f par la translation verticale de vecteur $k\vec{j}$.

Théorème 2 (Translation horizontale).

Si $g(x) = f(x + k)$ avec $k \in \mathbb{R}$

Alors C_g est l'image de C_f par la translation horizontale de vecteur $-k\vec{i}$.

5.2.2 symétries

Théorème 3 (Symétrie d'axe O_x).

Si $g(x) = -f(x)$

Alors C_g est l'image de C_f par la symétrie orthogonale d'axe O_x .

Théorème 4 (Symétrie d'axe O_y).

Si $g(x) = f(-x)$

Alors C_g est l'image de C_f par la symétrie orthogonale d'axe O_y .

Théorème 5 (Symétrie centrale de centre O).

Si $g(x) = -f(-x)$

Alors C_g est l'image de C_f par la symétrie centrale de centre O .

5.2.3 Dilatation

Théorème 6 (Dilatation verticale).

Si $g(x) = k.f(x)$ avec $k > 0$

Alors C_g est l'image de C_f par une dilatation verticale de facteur k .

Théorème 7 (Dilatation horizontale).

Si $g(x) = f(k.x)$ avec $k > 0$

Alors C_g est l'image de C_f par une dilatation horizontale de facteur $\frac{1}{k}$.

Théorème 8 (Homothétie de centre O et de rapport k).

Si $g(x) = k.f(\frac{1}{k}.x)$ avec $k > 0$

Alors C_g est l'image de C_f par une homothétie de centre O et de rapport k .

Exercices

6 TD1-2-3

Exercice 1.

Étudier les fonctions

1. $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$
2. $U(r) = \frac{r^2 - R}{r + R}$ où R est une constante non nulle
3. $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$
4. $f : x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$

Exercice 2.

Préciser si les fonctions suivantes sont majorées, minorées et / ou bornées sur un intervalle I que vous choisirez :

1. $f(x) = x^2 e^{-x}$
2. $f(x) = \frac{1}{3x^2 - 2x + 1}$
3. $f(x) = \frac{x^2 \cos(x)}{x^2 + 1}$

Exercice 3. Soit $n \geq 1$ un entier. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le sup, l'inf, et le minimum/maximum s'ils existent sur l'intervalle fourni.

1. $f_n(x) = x^n e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$.
2. $g_n(x) = \frac{e^{xn} - 1}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

7 TD4

Exercice 4.

Calculer les valeurs exactes des expressions suivantes

$$\cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) \quad \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \quad \sin\left(\frac{123\pi}{6}\right) \quad \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

Exercice 5.

Donner la plus petite période des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \sin(3x)$
2. $f_1(x) = \cos(\omega x + \frac{\pi}{4})$
3. $f_1(x) = \sin(3x) - \cos(\frac{2x}{3})$
4. $f_1(x) = \frac{\tan(4x)}{\tan(2x)}$

Exercice 6.

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$ et $[0; 2\pi]$.

1. $\sin(2x) = \sin(\frac{\pi}{3})$

3. $\tan(3x) = 1$

2. $\cos(3x + \pi) = \cos(\frac{\pi}{2})$

4. $\sin x + \sin(2x) = 0$

Exercice 7.

Résoudre les inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$.

1. $\sin(2x) \leq \frac{1}{2}$

2. $\cos(3x + \pi) > -\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. $\tan(3x) > 1$

8 TD5-6-début7

Exercice 8.

Étudier la fonction suivante :

1. $h : x \mapsto \operatorname{ch}\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)$

Exercice 9.

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x \operatorname{sh}(\frac{1}{x})$

1. Étudier la parité de f .

2. Étudier les limites de f .

3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et prouver que $f'(x) = \operatorname{ch}(\frac{1}{x})(\operatorname{th}(\frac{1}{x}) - \frac{1}{x})$.

4. Justifier que pour tout $y \geq 0$ $\operatorname{th}(y) \leq y$, en déduire le tableau de variations de f et la courbe représentative de f .

Exercice 10.

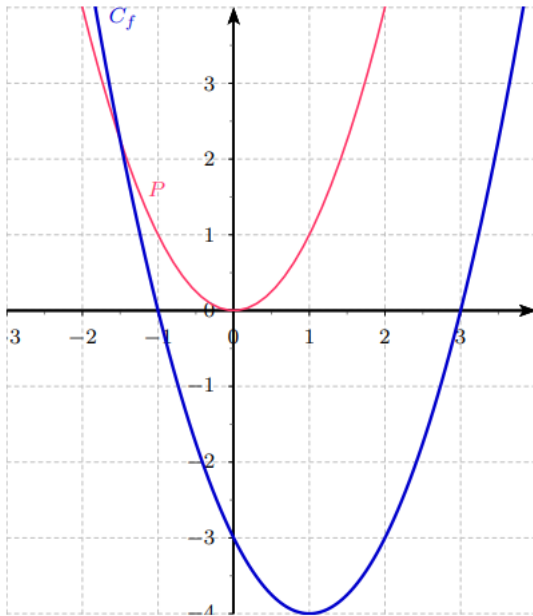
Écrire $\operatorname{ch}(x)$ en fonction de $\operatorname{sh}(x)$ et $\operatorname{sh}(2x)$.

Simplifier $u_n = \prod_{p=1}^n \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2^p}\right)$, en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

9 fin TD7-TD8

Exercice 11.

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Voici sa représentation graphique dans un repère cartésien, accompagnée de la parabole d'équation $y = x^2$:



- Par quelle transformation géométrique semble-t-on obtenir C_f à partir de P ?
- Le démontrer par le calcul.

Exercice 12.

1. Donner une représentation graphique pour la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si } x \in [-3, -2] \\ 1 & \text{si } x \in [-2, 1] \\ -x + 2 & \text{si } x \in [1, 5] \end{cases}$$

2. Soit h la fonction définie par $h(x) = -f(x)$.
Préciser la transformation associée puis donner le graphe et l'expression de h .
3. Même question pour $i(x) = f(-x)$
4. Même question pour $g(x) = f(x + 1) + 2$

Exercice 13.

1. Tracer le plus rapidement possible les graphes des applications suivantes. On commencera par tracer le graphe de la fonction élémentaire utilisée (sinus, cosinus, etc.).
 $f_1(x) = \sin(x) + 1$; $f_2(x) = -\cos(x)$; $f_3(x) = \ln(-x)$; $f_4(x) = 2\sqrt{x}$; $f_5(x) = \sin(2x)$;
 $f_6(x) = \sqrt{x+1}$
2. Plus difficile : $f_7(x) = 2\sin(x) + 1$; $f_8(x) = \ln(2x + 1)$; $f_9(x) = \sin(2x) + 1$; $f_{10}(x) = 2\ln(x + 1)$.