FONCTIONS : Dérivabilité et Différentielle

Objectifs

- **Connaître la définition du nombre dérivé et ses différentes interprétations.**
- **Calcul des dérivées**
- **Approximation d'ordre 1 des fonctions usuelles.**
- **Comprendre les notations utilisées en physique.**

1 Dérivée

1.1 Introduction

1.1.1 Taux d'accroissement

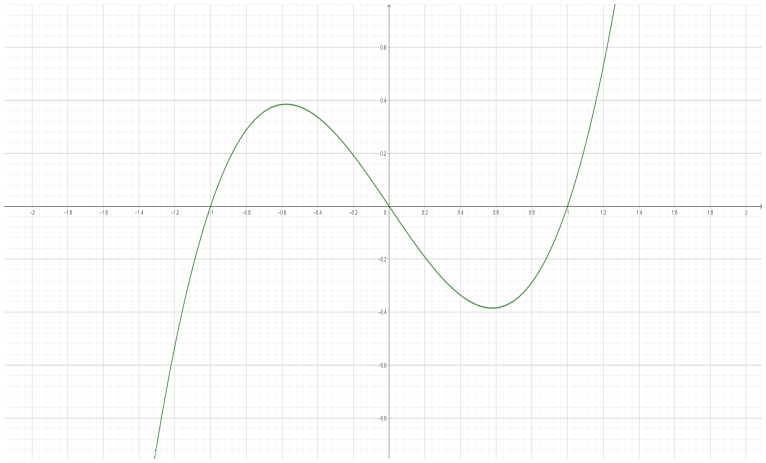
En physique on trouve souvent le quotient suivant :

$$\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

variation d'une grandeur f par rapport à la variation du temps t et que l'on note $\dfrac{\Delta f}{\Delta t}$.
On l'appelle taux d'accroissement de f. On utilise la lettre Δ (Delta) pour une variation, une grande **D**ifférence.

Exemple 1.

1. En électricité, on appelle $q(t)$ la charge en coulomb à l'instant t sur un conducteur, et l'on considère
$$\frac{q(t_1) - q(t_2)}{t_1 - t_2} = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$
En mécanique, on appelle $x(t)$ la distance parcourue à l'instant t et l'on considère
$$\frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{1}$$
Interpréter physiquement les deux taux d'accroissements précédents.
2. En mathématiques, si f est une fonction et x sa variable, on considère
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$
Interpréter graphiquement le taux d'accroissement sur le graphique suivant.



Exemple 2. 1. Écrire le taux d'accroissement des fonctions $\sin(x)$, $\exp(x)$ et $\ln(1+x)$ en $a = 0$.

2. Écrire le taux d'accroissement de $f(x) = \ln(x)$ en $a = 1$.
3. Écrire le taux d'accroissement de $\sqrt{x}$ en $a = 4$.

1.2 Dérivation en un point

Soit a fixé et $x \neq a$. Remarquons qu'en posant $h = x - a \neq 0$ (h représente la distance de x à a), le taux d'accroissement en a peut se réécrire uniquement en fonction de h :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Définition 1.
Soient $a \in I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

(i) On dit que f est dérivable en a si et seulement si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe et est finie ; cette limite est alors notée $f'(a)$ et appelée dérivée de f en a.

(ii) On dit que f est dérivable à droite en a si et seulement si

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe et est finie ; cette limite est alors notée $f'_d(a)$ et appelée dérivée de f à droite en a.

(iii) On dit que f est dérivable à gauche en a si et seulement si

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe et est finie ; cette limite est alors notée $f'_g(a)$ et appelée dérivée de f à gauche en a.

Exemple 3.
Soit f la fonction valeur absolue. Étudier la dérivabilité de f en 0.

Proposition 1.
Soit a un réel appartenant à un intervalle ouvert I.

(i) Pour que f soit dérivable en a, il faut et il suffit que f soit dérivable à droite et à gauche en a et que $f'_d(a) = f'_g(a)$, toutes deux étant des nombres finis.

(ii) Si $f'_d(a)$ et $f'_g(a)$ existent, sont finies mais différentes alors le point $A(a, f(a))$ est appelé point anguleux.

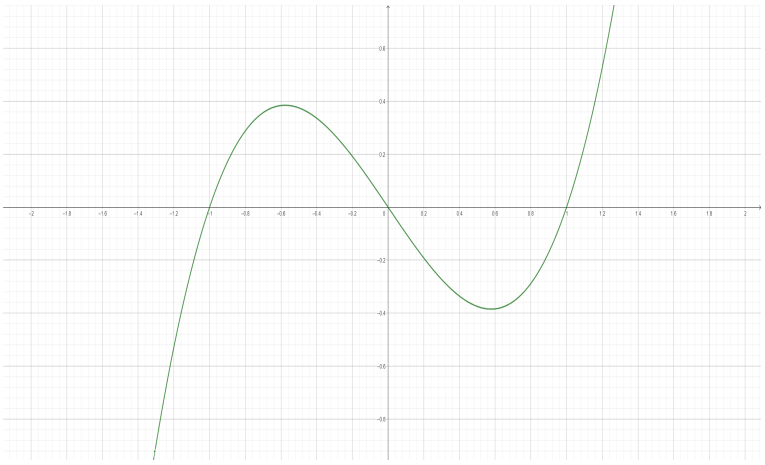
(iii) Si $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \infty$ alors la courbe admet une demi-tangente verticale à gauche en a.

Remarque 1.
Si I est de la forme $[a; b[$ alors la notion de dérivée à droite se confond avec la notion de dérivée, il n'y a pas de dérivée à gauche. De même pour un intervalle de la forme $]b; a]$.

Exemple 4.
Donner un exemple de fonction dans chacun des cas précédents, et les représenter.

1.3 Interprétation graphique de la dérivée

En reprenant les notations précédente, interpréter graphiquement le nombre dérivée de f en a sur le graphique suivant.



Théorème 1 (Équation de la tangente)**.**
Soit f une fonction dérivable en a alors une équation de la tangente à la courbe de la fonction f en a est

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Exemple 5.
Déterminer une équation de la tangente à la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ pour $x = 3$

Proposition 2.
Une fonction dérivable en un réel a est continue en a.

Exemple 6.
La réciproque est-elle vraie ?

1.4 Application au calcul de limites

Les résultats suivants s'obtiennent facilement en utilisant le nombre dérivé, en effet si l'on reconnait la limite du taux d'accroissement dans la limite que l'on cherche, elle est égale au nombre dérivée pour les fonctions dérivables.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Propriété 1.

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \cos 0 = 1$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = 1$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

Exemple 7.
Démontrer ces résultats.

Remarque 2. On peut aussi utiliser cette technique pour calculer la limite de certains quotient en faisant apparaître un quotient de taux d'accroissement.

Exemple 8.
Trouver la limite en 0 de l'expression : $\dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{\sin x}$

Remarque 3. Et en combinant avec un changement de variable.

Exemple 9.
Trouver la limite en 0 de l'expression : $\dfrac{\sin(2x)}{x}$

1.5 Fonction dérivée

Définition 2.
On appelle dérivée de $f : I \to \mathbb{R}$, la fonction qui à chaque x appartenant à I, associe $f'(x)$. Cette fonction est notée f'. On dit que f est dérivable sur I si et seulement si la fonction f est dérivable pour tout x appartenant à I.

Exemple 10.
La fonction racine carrée est-elle dérivable sur son ensemble de définition ?

Définition 3 (Notations de Leibniz).
A partir de $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$
on **note**

$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a)$$

ou encore $f' = \dfrac{df}{dx}$, $f'(x) = \dfrac{df}{dx}$,etc...

1.6 Opérations sur les dérivées

Théorème 2.
Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I, alors :

(i) $f + g$ est dérivable sur I et $(f+g)' = f' + g'$

(ii) λf est dérivable sur I et $(\lambda f)' = \lambda f'$

(iii) fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$

(iv) Si pour tout x appartenant à I, $g(x)$ est différent de 0 alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

Théorème 3.
Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ tels que $f(I) \subset J$.
Soit la fonction $g \circ f$, de I dans $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto g(f(x))$.
Si f est dérivable sur I et si g est dérivable sur J alors gof est dérivable sur I et $(gof)' = (g' \circ f)\, f'$.

Exemple 11.
Soit h la fonction définie par $h(x) = e^{\ln x}$. Avec les notations du théorème précédent, déterminer I, J, f et g puis calculer la fonction dérivée de la fonction h.

Remarque 4.
En physique, on utilise souvent la notation de Leibniz. Supposons que l'on ait par exemple, trois fonctions z, y et x tels que $z = y \circ x$, c'est à dire $z(t) = y(x(t))$ avec t la variable. Avec les notations de Leibniz, $z'(t) = (yox)'(t) = y'(x(t)).x'(t)$ revient à écrire :

$$\frac{dz}{dt}(t) = \frac{dy}{dX}(x(t)).\frac{dx}{dt}(t)$$

L'usage en physique, veut que l'égalité précédente devienne :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dy}{dx}.\frac{dx}{dt}$$

Cette écriture est pratique du point de vue mnémotechnique, mais elle comporte deux dangers :

- Le dx au dénominateur, n'est pas du tout le même dx que le numérateur. Le premier correspond à la variable de y, alors que le deuxième correspond à la fonction x.
- Il n'est pas précisé que $\dfrac{dy}{dx}$ est évalué en $x(t)$.

1.7 Dérivées successives

Définition 4.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.
On définit les dérivées successives de f de proche en proche par récurrence en posant :
Pour $a \in I$, $f^{(n)}(a) = \left(f^{(n-1)}\right)'(a)$ où $f^{(n)}$ est la fonction dérivée de $f^{(n-1)}$
$f^{(n)}$ est appelée dérivée $n^{\text{ième}}$ de f.
On dit que f est n fois dérivable sur I si et seulement si $f^{(n)}$ est définie sur I.
On dit que f est indéfiniment dérivable sur I si et seulement si f est n fois dérivable sur I pour tout entier naturel n.

Exemple 12.
Déterminer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction f définie par $f(x) = e^{2x}$.

Remarque 5.
On a aussi les notations suivantes pour les dérivées successives :

$$f'(x) = \frac{df}{dx}, f"(x) = \frac{d^2f}{dx^2} ... f^{(n)}(x) = \frac{d^nf}{dx^n}$$

Théorème 4.
Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions n fois dérivables sur I, alors :

(i) $f + g$ est n fois dérivable sur I et $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$

(ii) λf est n fois dérivable sur I et $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$

(iii) Si pour tout x appartenant à I $g(x)$ est différent de 0 alors $\frac{f}{g}$ est n fois dérivable sur I

1.8 Classe d'une fonction

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $n \in \mathbb{N}$.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si et seulement si f est n fois dérivable et $f^{(n)}$ est continue sur I.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si et seulement si f est indéfiniment dérivable sur I.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^0$ sur I si et seulement si f est continue sur I.

Propriété 2.
Les fonctions rationnelles, trigonométriques, exponentielle, logarithme, ainsi leur composée sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaine de définition.

2 Différentielle

2.1 Différentielle en un point

En physique, beaucoup de phénomènes se modélisent en considérant la variation de la grandeur étudiée lorsque la variable subit une "petite" variation. En mathématiques, c'est l'équivalent de chercher une approximation quand la variable x est "proche" d'un point a fixé.

Quand x est proche de a, une première approximation très grossière est d'écrire, si f est continue en a, $f(x) \approx f(a)$. Pour rendre cette écriture rigoureuse, cela revient à dire mathématiquement, que quand $x \to a$:

$$f(x) = f(a) + o(1).$$

La quantité $o(1)$ est un terme d'erreur qui représente l'erreur commise en approximant la fonction $f(x)$ par la constante $f(a)$. C'est ce qu'on appelle une approximation d'ordre 0 (pas de dépendance en x) - c'est une approximation très peu précise.

Exemple 13. Quand $x \to 0$, on a $\exp(x) = 1 + o(1)$.

Soit maintenant $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en a. Par définition, on a

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a),$$

ce que l'on peut réécrire, quand $x \to a$, par

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) + o(1).$$

En multipliant cette équation par $(x - a)$, on obtient donc

$$f(x) - f(a) = f'(a).(x - a) + o(x - a),$$

ou encore

$$f(x) = f(a) + f'(a).(x - a) + o(x - a).$$

Les termes $o(x - a)$ représentent des termes d'erreurs : c'est l'erreur commise en approximant $f(x)$ par sa tangente en x, et le calcul précédent nous dit que cette erreur est négligeable devant $(x - a)$. C'est ce que l'on appelle une Approximation de f à l'ordre 1 autour de a.
On peut réécrire cette expression en fonction de $h = x - a$:

$$f(x + h) = f(x) + f'(a).h + o(h).$$

Exemple 14. Écrire l'approximation à l'ordre 1 de $f(x) = x^3$ en $a = 1$. En déduire une valeur approchée de $(1,001)^3$ et comparer à la valeur exacte.

Définition 5.
On définit la fonction différentielle de f en $x = a$ de la manière suivante :

$$df_a : h \to f'(a).h$$

Ainsi l'approximation précédente devient :

$$\Delta f = f(a + h) - f(a) = df_a(h) + o(h).$$

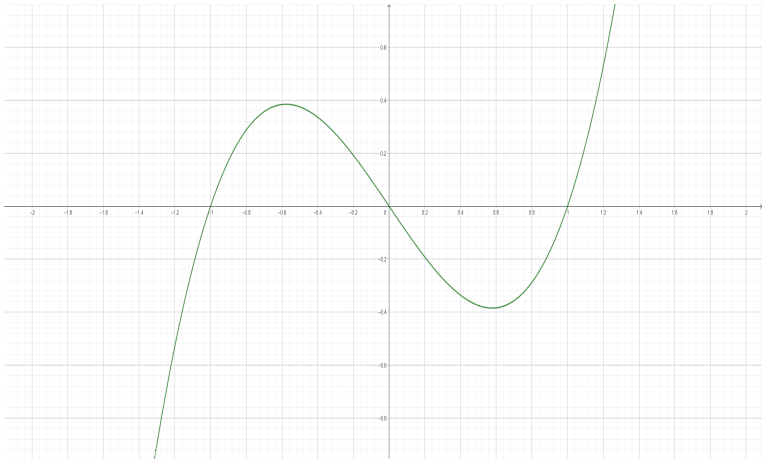
Ainsi la différentielle df réalise une approximation de la variation de la fonction Δf quand $h = \Delta x$ tend vers 0.

Exemple 15.
Calculer les différentielles de la fonction carrée et de la fonction identité.

Remarque 6.
On remarque que la différentielle est une fonction linéaire.

2.2 Approximation de Δf par df

Pour un a fixé, représenter sur le graphique suivant : $h = \Delta x$, Δf, $df_a(h)$ et le terme d'erreur $o(h)$.



dx en mathématiques :
dx est la fonction différentielle de la fonction identité $id(x) = x$

$$dx : h \to h$$

ainsi on a l'égalité de fonctions suivante

$$df_a = f'(a)dx$$

dx en physique :
En physique quand on considère une petite variation de x (variation infinitésimale de x) on note cette variation dx plutôt que Δx ce qui revient en fait à confondre la fonction dx et l'image de Δx par dx :

$$dx(\Delta x) = \Delta x$$

On notera que cette égalité est toujours vraie quelque soit Δx.
Il est important de noter que si l'on a $\Delta x = dx$, il n'en est rien de Δy et dy.

Remarque 7.

- On a vu que $\dfrac{df_a}{dx}$ peut être considéré comme une notation, mais maintenant on peut aussi le voir comme un quotient de fonctions différentielles.
- En passant de $df_a = f'(a)dx$ à $\dfrac{df_a}{dx}$, on a l'impression de faire une division par dx, alors qu'en fait ce sont deux écritures différentes : la première est une relation entre deux différentielles, alors que la seconde est une notation de la dérivée.

Exemple 16.
Ces notations sont à manier avec précautions mais sont très utiles.
Prenons la surface d'un cercle de rayon R et de diamètre $D = 2R$.
On a $S = \pi R^2$ ou $S = \pi \dfrac{D^2}{4}$.
Dériver ces deux égalités. Qu'en pensez vous ?
Exprimer dS de deux manières différentes, en fonction de dR puis de dD.

Exemple 17 (en électricité)**.**
Une résistance R soumise à ses bornes à une différence de potentiel U est traversée par un courant continu d'intensité

$$I = \frac{U}{R}.$$

Quelle variation de l'intensité correspond-elle à une faible variation de R ? Faire le calcul pour $R = 100$ ohms, une tension constante de 100 volts et une variation $\Delta R = 1$ ohms .
Ce type de raisonnement peut aussi intervenir pour les calculs d'incertitude : si la valeur de R est connue avec une précision ΔR de plus ou moins 1Ω, quelle est l'erreur ΔI que l'on commet sur l'intensité ?

2.3 Opérations sur les différentielles

Pour tous les calculs de différentielles on peut soit revenir à la définition et utiliser les règles de calculs sur les dérivées, soit utiliser directement les propriétés suivantes qui sont similaires.

Théorème 5.
Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions différentiable sur I, alors :

(i) $f + g$ est différentiable sur I et $d(f+g)_a = df_a + dg_a$

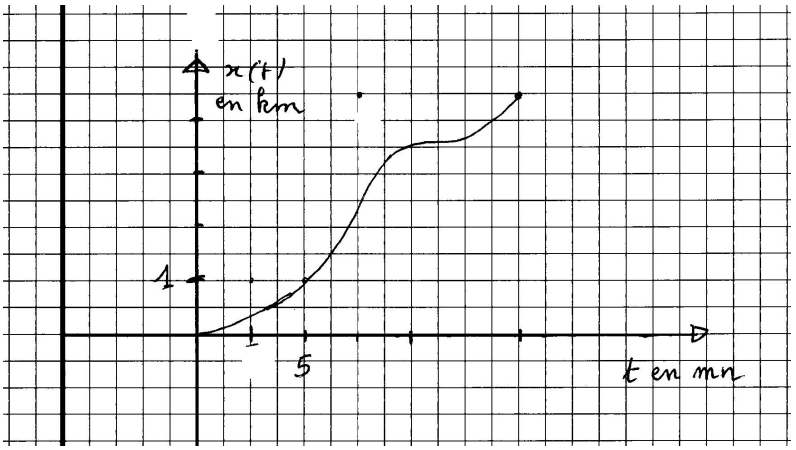
(ii) λf est différentiable sur I et $d(\lambda f)_a = \lambda df_a$

(iii) fg est différentiable sur I et $d(fg)_a = g(a)df_a + f(a).dg_a$

(iv) Si pour tout x appartenant à I $g(x)$ est différent de 0 alors $\frac{f}{g}$ est différentiable sur I et $d\left(\frac{f}{g}\right)_a = \frac{g(a)df_a - f(a).dg_a}{g^2(a)}$

Exercices

Exercice 1.
La courbe ci-dessous représente la distance x parcourue par un cycliste en fonction du temps t en minutes.



1. Exprimer en fonction des lettres de l'énoncé la vitesse du cycliste.
2. Graphiquement :

(a) Quelle est sa vitesse au $t = 15'$?

(b) A quel(s) moment(s) sa vitesse est-elle la plus grande en km/h ?

(c) A quel(s) moment(s) sa vitesse est-elle la plus lente en km/h ?

Exercice 2.
Calculer $f'(x)$ pour

1. $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 - \cos x}$
2. $f(x) = \dfrac{x-1}{|x+1|}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$
4. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$
5. $f(x) = \sqrt{1 + x^2 \sin^2 x}$
6. $f(x) = \dfrac{\exp(1/x) + 1}{\exp(1/x) - 1}$.
7. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right)$
8. $f(x) = (x(x-2))^{1/3}$.

Exercice 3.
Calculer les dérivées suivantes :

1. $\dfrac{dH}{d\omega}$ avec $H = \dfrac{R\omega}{1-\omega^2}$
2. $\dfrac{di}{dR}$ avec $i = \dfrac{CR^2\omega}{1-LR}$
3. $\dfrac{dx}{dt}$ avec $x = \sqrt{mt^2 + pt}$

Exercice 4.
Étudier la dérivabilité en 0 de chacune des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto x|x|$
2. $g : x \mapsto \dfrac{x}{1+|x|}$
3. $h : x \mapsto \dfrac{1}{1+|x|}$.

Exercice 5.
soit la fonction $f$définie par :$\begin{cases} f(x) = x^2 - 1 \text{ si } x < 0 \\ f(x) = x^2 + 1 \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases}$.
Montrer qu'en $x_0 = 0$, f est dérivable à droite mais pas à gauche.

Exercice 6.
Prolonger par continuité en 0 et étudier la dérivabilité de

1. $f(x) = \sqrt{x}\ln x$.
2. $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{\sqrt{x}}$.

Exercice 7.

On admet pour l'instant que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$
On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} \dfrac{\cos x - 1}{\sin x} \text{ pour } x \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right] \\ f(0) = 0 \end{cases}$.
Étudier la dérivabilité de f sur son ensemble de définition et déterminer f'.

Exercice 8.
f étant une fonction dérivable en x_0, calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h}$
2. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h}$

Exercice 9.
Calculer les limites suivantes en faisant apparaître un taux d'accroissement.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+2) - \ln 2}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\ln(x+1)}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$
5. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^n - 1}$

Exercice 10.
Soit $f(x) = \dfrac{1+x}{10+x^3}$.

1. Calculer la dérivée de f.
2. Donner l'équation de la tangente de f en 0.
3. Donner la différentielle de f en 0.
4. En déduire une approximation de $f(0.1)$.

Exercice 11.
Soit $f(x) = \sqrt{5 + x^2}$. Déterminer la différentielle de f en $a = 2$ et en déduire une approximation de $f(2.03)$.

Exercice 12.
Calculer les différentielles des fonctions suivantes :

1. $f(t) = t \ln(t)$
2. $G = \dfrac{R}{\sin R}$
3. $f = r \cos\theta$, r et θ sont des fonctions qui dépendent de t.

Exercice 13. Différentielle Logarithmique. On se propose dans cet exercice d'introduire la différentielle logarithmique et ses applications principales.

1. Soit $t \mapsto f(t)$ une fonction strictement positive. Déterminer $d(\ln(f))$ en fonction de f et de dt, puis en fonction de f et de df.
2. En déduire que $d(\ln(f))$ fournit une approximation de l'accroissement relatif de la grandeur f.
3. Soit A, B, C des grandeurs strictement positives, $\alpha, \beta, \gamma > 0$, et $F = \dfrac{A^\alpha . B^\beta}{C^\gamma}$. Déterminer $d(\ln(F))$ et en déduire une approximation de l'accroissement relatif de F en fonction de ceux de A, B, C.
4. En électricité, soit $I = \dfrac{U}{R}$. On mesure U et R, mais on suppose que la mesure de U est précise à plus ou moins 2%, et celle de R à plus ou moins 5%. Calculer $d(\ln(I))$ et en déduire quel est l'incertitude relative sur la mesure de I.