ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

Objectifs

- **Savoir résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants**
- **Savoir résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants**

1 Introduction

1.1 En mathématiques

Vous avez vu en terminale qu'il existait une unique fonction qui était égale à sa dérivée et qui avait pour image 1 en 0. Cette fonction est la fonction exponentielle.
Autrement dit, si on considère l'équation $f' = f$ où f est une fonction inconnue, alors $x \longmapsto e^x$ est une solution de cette équation. On dit que $f' = f$ est une équation différentielle.

Vidéo : Méthodologie pour faire les exemples 1 et 2)

Exemple 1.

1. Montrer que les fonctions f définies par $f(x) = ke^x$ où k est une constante réelle sont des solutions de l'équation différentielle $f' = f$.
2. Donner 3 solutions distinctes de l'équation différentielle. Combien l'équation a t-elle de solutions ?

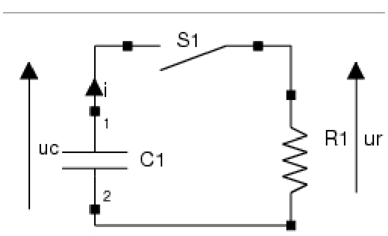
1.2 En physique

Exemple 2.

On considère le circuit RC ci-contre. On a les relations suivantes :

$i = C\dfrac{dU_C}{dt}$ et $U_R = -Ri$ et $U = U_C = U_R$.

Déduire des relations précédentes une équation différentielle vérifiée par U.



2 Les équations différentielles

Définition 1.
Une équation différentielle est une équation dans laquelle l'inconnue est une fonction f qui vérifie une relation entre elle-même et ses dérivées $n^{\text{ième}}$.

Exemple 3.
$f'(x)f(x) + 2xf"(x) + e^x = 0$ est une équation différentielle.

Notations :

- pour simplifier l'écriture, on n'écrit pas le x dans $f(x)$.
- en mathématiques, on utilise plutôt la lettre y à la place de la lettre f. Donc **y est une fonction**.
- en mécanique, la variable est souvent t, la fonction est x (à la place de y) et on écrit $\dot{x}$ au lieu de f' (Notation de Newton).
- en physique, on utilise la notation $\dfrac{d^nU}{dt^n}$ pour la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction U.

Vidéo : Exemples d'écriture d'équation différentielle

Exemple 4.
Écrire en notations mathématiques, mécanique et physique l'équation de l'exemple précédent.

Résoudre une équation différentielle c'est chercher toutes les fonctions solutions de cette équation.
Malheureusement on ne sait résoudre que quelques familles d'équations différentielles. Par exemple, on ne sait pas résoudre l'équation différentielle précédente. Lorsqu'en physique on a une équation différentielle que l'on ne sait pas résoudre, on utilise un logiciel qui permet d'obtenir des valeurs approchées des solutions de l'équation différentielle.

Exemple de résolution approchée de l'équation $f'(x)f(x) + 2xf"(x) + e^x = 0$ par le logiciel Mathématica

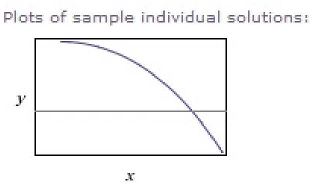


FIGURE 1 – $y(1) = 1$ et $y'(1) = 0$

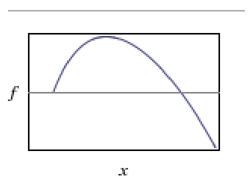


FIGURE 2 – $y(1) = 0$ et $y'(1) = 1$

On appelle **Courbe intégrale**, les représentations graphiques des solutions d'une équation différentielle.

Vidéo : Exemple de courbe intégrale

Exemple 5.
Représenter les courbes intégrales des solutions de l'équation de l'exemple 1.

3 Équations différentielles linéaires

Définition 2.
Une équation différentielle linéaire est une équation de la forme

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

où a_n, ...,a_0 et b sont des fonctions et a_n n'est pas la fonction nulle.

- b est appelée le second membre de l'équation.
- Lorsque le second membre est nul ($b = 0$), on dit que l'on a une **équation homogène**.
- n est appelé l'ordre de l'équation.

Vidéo : Exemple d'équation différentielle linéaire et non linéaire

Exemple 6.
Parmi les équations suivantes, donner celles qui sont linéaires et préciser celles qui sont homogènes ainsi que leur ordre.

1. $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + 3x = 5$
2. $e^x y^{(5)} + \ln xy = \dfrac{2x}{x+3}$
3. $x\ \dot{x} + t^2 x = 3$
4. $2y" - 3y' = y$

Proposition 1. Structure de l'ensemble des solutions
Les solutions d'une équation différentielle linéaire sont la somme de **la** solution de l'équation homogène et d'**une** solution de l'équation.

Exemple 7.
Démontrer la proposition précédente pour $n = 2$.

La propriété ci-dessus est très pratique pour résoudre une équation différentielle linéaire **à condition** de connaître les solutions de l'équation homogène et une solution de (E), ce qui est très difficile dans le cas général. Dans ce chapitre nous nous contenterons d'étudier les équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2 à coefficients constants.

Proposition 2. Principe de superposition des solutions
Soit (H) une équation différentielle linéaire homogène, soit (E_1), (E_2) et (E_3) trois équations ayant (H) pour équation homogène et respectivement d_1, d_2 et $d_1 + d_2$ comme second membre.
Soient f_1 et f_2 des solutions respectives des équations (E_1) et (E_2).
Alors $y = f_1 + f_2$ est solution de l'équation différentielle (E_3)

Vidéo : Exemple de la proposition 2

Exemple 8. (Fait en cours)

Démontrer la propriété précédente pour $n = 2$.

4 Équations différentielles linéaires du 1er ordre à coefficients constants

4.1 Équation différentielle homogène

Définition 3.
Une équation différentielle linéaire homogène, du premier ordre, à coefficients constants peut s'écrire sous la forme :

$$y' + ay = 0$$

où a est une constante réelle.

Proposition 3.
Les solutions de l'équation $y' + ay = 0$ s'écrivent sous la forme $y = ke^{-ax}$ avec k une constante réelle quelconque.

Démonstration : (Fait en cours)
On a vu dans le paragraphe précédent que les fonctions f définies par $f(x) = ke^{-ax}$ sont des solutions de l'équation différentielle. Il reste donc à montrer que ce sont les seules.
Soit f une solution de $y' + ay = 0$ et soit g une fonction telle que $g(x) = f(x)e^{ax}$.
Sachant que f est une solution de $y' + ay = 0$, déterminer g et en déduire f.

Vidéo : Exemple de résolution d'équation linéaire homogène du premier ordre

Exemple 9.
Résoudre l'équation différentielle : $2y' - 3y = 0$.

4.2 Équation avec second membre

4.2.1 Définition

Définition 4.
Une équation différentielle linéaire (E), du premier ordre, à coefficients constants peut s'écrire sous la forme :

$$y' + ay = b(x)$$

où a est une constante et b est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

4.2.2 Résolution de (E)

On va utiliser la proposition 1. Comme on connaît la solution générale de l'équation homogène associée, il n'y a plus qu'à déterminer une solution particulière de l'équation différentielle. Nous ne traitons dans ce chapitre que certains cas particuliers de second membre.

Le second membre est polynôme

Soit P une fonction polynomiale de degré $n \in \mathbb{N}$ et $(E) : y' + ay = P(x)$ et $a \neq 0$.
Alors une solution de (E) est de la forme $y_p = Q(x)$ où Q est un polynôme de degré n.

Vidéo : Méthode pour résoudre l'exemple suivant

Exemple 10.
Résoudre l'équation suivante : $2y' + 3y = 2x + 1$

Exemple 11. En physique
En physique, cette année, la plupart du temps, vous aurez à résoudre : $y' + ay = K$ avec K une constante réelle et $a \neq 0$. Montrer que la solution particulière est une constante et en déduire les solutions de l'équation.
Vidéo : Correction exemple 11

Le second membre est une combinaison linéaire de cosinus et sinus.
Soit α, β et ω trois réels et $(E) : y' + ay = \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x))$.
Alors une solution de (E) est de la forme $y_p = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$.

Exemple 12.
Résoudre l'équation différentielle $y' + 4y = \cos 2x$.
Vidéo : Correction exemple 12

4.3 Equation avec condition initiale - Problème de Cauchy

Proposition 4.
Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique solution f de l'équation $(E) : y' + ay = b$, vérifiant la condition initiale $f(x_0) = y_0$.

Exemple 13.
Les solutions de l'équation $y' + 2y = 5$ sont de la forme : $y = ke^{-2x} + \dfrac{5}{2}$
Donner la solution vérifiant $f(1) = 2$.
Vidéo : Correction exemple 13

4.4 Problèmes conduisant à une équation différentielle du premier ordre en physique

- Électronique : $y' + \dfrac{1}{\tau} y = E(t)$ où $\tau > 0$ est une constante homogène à un temps et $E(t)$ est le signal d'entrée, par exemple une tension fournie par un générateur.
- Chimie : $\dfrac{dm}{dt} = -km$, masse d'un réactif dans une réaction chimique
- Thermodynamique : $\dfrac{dT}{dt} = -k(T - T_0)$. Température d'un corps K plongé dans un milieu suivant la loi de Newton.

Exemple 14.
Résoudre les équations ci-dessus.(On prendra $E(t) = 5 \cos t$) : fait en cours

5 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

5.1 Équation différentielle homogène

Définition 5.
Une équation différentielle linéaire homogène, du second ordre, à coefficients constants peut s'écrire sous la forme :

$$(H) : ay'' + by' + cy = 0$$

où a, b et c sont trois constantes réelles et $a \neq 0$.

Proposition 5.

Vidéo : Détails de la proposition
Soit (H) l'équation : $(H) : ay'' + by' + cy = 0$.
On appelle **équation caractéristique** associée à (H), l'équation notée (EC) : $ar^2 + br + c = 0$.
On note $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.
Alors trois cas se présentent :

1. Si $\Delta > 0$, (EC) admet deux racines réelles distinctes α et β, alors, les solutions de (H) sont $f(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x}$ où A et B sont deux constantes réelles quelconques.
2. Si $\Delta = 0$, (EC) admet une racine réelle double α, alors, les solutions de (H) sont $f(x) = (Ax + B)e^{\alpha x}$ où A et B sont deux constantes réelles quelconques.
3. Si $\Delta < 0$, (EC) admet deux racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$, et $\alpha - i\beta$ alors, les solutions de (H) sont $f(x) = e^{\alpha x}\left(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)\right)$ où A et B sont deux constantes réelles quelconques.

Exemple 15.
Déterminer les solutions des équations suivantes :

1. $y'' - 5y' + 10y = 0$
2. $y'' - 4y' + 4y = 0$
3. $y'' - y' - 2y = 0$

Vidéo : Correction exemple 15

Exemple 16. En physique
En physique, lorsque l'on a des oscillations sans frottement, on obtient l'équation suivante :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$$

Résoudre cette équation.

5.2 Équation avec second membre

5.2.1 Définition

Définition 6.
Une équation différentielle linéaire (E), du second ordre, à coefficients constants peut s'écrire sous la forme :

$$ay'' + by' + cy = d(x)$$

où a, b et c sont trois constantes réelles, $a \neq 0$ et d une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

5.2.2 Résolution de (E)

Comme on connaît la solution générale de l'équation homogène associée, il n'y a plus qu'à déterminer une solution particulière de l'équation différentielle. Nous ne traitons dans ce chapitre que certains cas particuliers de second membre.

Le second membre est un polynôme

Soit P une fonction polynomiale de degré $n \in \mathbb{N}$ et $(E) : ay'' + by' + cy = P(x)$ avec $a \neq 0$ et $c \neq 0$.
Alors une solution de (E) est de la forme $y_p = Q(x)$ où Q est un polynôme de degré n.

Exemple 17.
Déterminer une solution particulière de l'équation suivante : $y'' + y' - 2y = x + 1$

Vidéo : Correction exemple 17

Le second membre est une combinaison linéaire de cosinus et sinus

Soit α, β et ω trois réels et $(E) : ay'' + by' + cy = \alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)$.
Alors une solution de (E) est de la forme $y_p = h(x)(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))$ et :

1. Si $i\omega$ n'est pas racine de (EC) alors $h(x) = 1$.
2. Si $i\omega$ est racine simple de alors $h(x) = x$.

Exemple 18.
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + y = \cos x$
2. $y'' + y' - 2y = \sin 2x$

Vidéo : Exemple 18 a)

Vidéo : Exemple 18 b)

5.3 Problème de Cauchy

Proposition 6.
Soient $x_0, y_0, x_1, y_1 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique solution f de l'équation
$(E) : ay'' + by' + cy = d(x)$, vérifiant les conditions initiales $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_1) = y_1$.

Exemple 19.
Les solution de l'équation de $y'' + 3y' + 2y = x + 1$ sont de la forme : $y = Ae^{-x} + Be^{-2x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$
Donner la solution vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$

Remarque 1.
La solution f d'une équation différentielle homogène du second ordre a deux constantes dans son expression, il faut et il suffit d'avoir deux conditions pour calculer ces constantes. Elles peuvent être, comme on vient de le voir des conditions sur f et f', mais on peut aussi avoir deux conditions sur f comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 20. Fait en cours
On considère une barre de longueur infinie qui est encastrée dans un mur. On considère que le mur a une température θ_M supérieure à la température ambiante de l'air θ_A. On admet que la température stabilisée θ à la distance x du mur vérifie l'équation différentielle $\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = -m^2\theta_A$, où m est une constante positive.
Déterminer θ en fonction des données de l'énoncé.

5.4 Problèmes conduisant à une équation différentielle du second ordre en physique

- Électronique : circuit RLC : $LC\frac{d^2U}{dt^2} + RC\frac{dU}{dt} + U = U_O \sin(\omega t)$
- Mécanique : Force de rappel d'un ressort : $-mg - ky - K\frac{dy}{dt} = m\frac{d^2y}{dt^2}$

5.5 Exercice fait en cours

Résoudre $y" + y = \frac{1}{4}\cos(3x)$ puis déterminer la solution telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.
Résoudre $y" - 4y' + 4y = x$.

Exercices

Exercice 1.
Quelles sont, parmi les équations différentielles suivantes, celles qui sont linéaires ?

1. $2yy' + 3 = t$
2. $x^2y + -y' \sin x \; e^x y = \sin 5x$
3. $t\dot{x} + 3t^2 = \ln t$
4. $x\dfrac{dx}{dt} + 5x = 3t$

Exercice 2.
Résoudre les équations différentielles ci-dessous :

1. $-2y' + 5y = x^2 - x + 3$
2. $3\dfrac{dz}{dt} = 5z + \sin t$
3. $-2x + \dot{x} = \cos(3t) + 2\sin(3t)$
4. $t + \cos t - \sin 2t + q = \dfrac{dq}{dt}$

Exercice 3.
Représenter les courbes intégrales C_n dont les fonctions f_n sont solutions de l'équation $y' - y = 0$ et vérifiant $f_n(0) = n$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 4.
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $9y'' + 12y' + 4y = 0$
2. $y'' + y' - 2y = 0$
3. $y'' + y' + 2y = 0$

Exercice 5.

1. Donner une équation différentielle linéaire du 2nd ordre à coefficients constants ayant e^{2x} et e^x comme solutions.
2. Donner une équation différentielle linéaire du 2nd ordre à coefficients constants ayant e^x et xe^x comme solutions.
3. Donner une équation différentielle linéaire du 2nd ordre à coefficients constants ayant 1 et x comme solutions.
4. Donner une équation différentielle linéaire du 2nd ordre à coefficients constants ayant $\cos 3x$ et $\sin 3x$ comme solutions.
5. Donner une équation différentielle linéaire du 2nd ordre à coefficients constants ayant $e^{2x}\cos x$ et $e^{2x}\sin x$ comme solutions.

Exercice 6.
Déterminer la solution générale des équations différentielles linéaires du 2nd ordre suivantes :

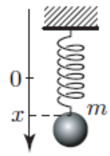
1. (a) $y'' + 2y' + 5y = 5x^2 + x + 1$
   (b) Déterminer la solution f de l'équation précédente vérifiant $f(0) = 2$ et $f'(0) = 1$.
2. $y'' + 4y = \cos 2x$
3. $y'' - 3y' + 2y = -3x + \sin x$

Exercice 8 : l'oscillateur libre

1 Introduction

On nomme ainsi les dispositifs physiques conduisant à une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2. En voici deux exemples :

1. Considérons une masse m suspendue à un ressort de raideur k. Si l'on écarte la masse de sa position d'équilibre (dans le sens vertical), son mouvement est régi par l'équation différentielle



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \tag{1}$$

, où c est un coefficient d'amortissement (dû par exemple au frottement).

2. Quand on laisse se décharger un condensateur de capacité C dans une bobine d'inductance L et de résistance R, sa charge $q(t)$ satisfait l'équation différentielle $L\dfrac{d^2q}{dt^2} + R\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{q}{C} = 0$.

Pour la suite nous étudierons le comportement des solutions en prenant l'exemple du pendule.

2 Étude temporelle de l'équation homogène

2.1 Oscillations non amorties : $c = 0$

1. Résoudre (??) en prenant $c = 0$.
2. En écrivant la solution y avec un seul terme, décrire la réponse temporelle. Ce cas est il observable en pratique ?

2.2 Oscillations amorties : $c > 0$

En fonction du signe du discriminant de l'équation caractéristique on distingue 3 cas.

2.2.1 Amortissement faible : $0 < c^2 < 4mk$

1. Résoudre (??) dans ce cas
2. Le mouvement est-il périodique ?
3. Y a-t-il oscillation du pendule ? Si oui que peut-on dire de leurs amplitudes ?
4. Donner l'allure de la courbe des solutions.

2.2.2 Amortissement fort : $c^2 > 4mk$

Étudier la courbe dans les deux cas suivants : $x'(0) = 0$ et $x'(0) = -4$ en prenant dans les deux cas : $m = 1, c = 5, k = 6$ et $x(0) = 1$.

2.2.3 Amortissement critique : $c^2 = 4mk$

Quel est la forme de la solution.
On admet que les courbes sont similaires au cas 2.2

3 Oscillation forcée

Considérons un oscillateur mécanique sur lequel on fait agir une force variable $f(t)$, ou bien un circuit résistance-capacité-inductance alimenté par un générateur de tension variable $E(t)$. La réponse $x(t)$ à *l'excitation* est solution d'une équation différentielle

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = b(t) \tag{2}$$

Nous nous plaçons dans le cas fréquent d'un second membre de la forme $E\cos\alpha t$ (avec E une constante positive)
Cas non amorti : Résoudre l'équation complète dans le cas non amorti. On prendra pour la suite $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \alpha$

1. Résoudre l'équation complète avec les conditions initiales $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$.
2. Décrire et donner l'allure de la courbe solution. On dit dans ce cas que l'excitation provoque *la résonance* de l'oscillateur.

Les domaines où la résonance intervient sont innombrables : balançoire enfantine, mais aussi résonances acoustiques des instruments de musique, la résonance des marées, la résonance orbitale en astronomie, la résonance de la membrane basilaire dans le phénomène d'audition, les résonances dans des circuits électroniques et, pour finir : tous les systèmes, montages, pièces mécaniques sont soumis au phénomène de résonance. Les systèmes abstraits sont également soumis à des résonances : on peut, à titre d'exemple, citer la dynamique des populations. Dans le domaine du génie civil, on peut observer ce phénomène principalement dans les passerelles piétonnes soumises à des marches militaires, par exemple, ou, de façon plus générale, dans les constructions soumises à un séisme.
En 1850, une troupe traversant en ordre serré le pont de la Basse-Chaîne, pont suspendu sur la Maine à Angers, provoqua la rupture du pont par résonance et la mort de 226 soldats. Pourtant, le règlement militaire interdisait déjà de marcher au pas sur un pont, ce qui laisse à penser que ce phénomène était connu auparavant.