LES FONCTIONS : LIMITES ET CONTINUITÉ

Objectifs

- **Connaître les réels.**
- **Connaître et manipuler la valeur absolue et les inégalités.**
- **Connaître les définitions de limites**
- **Savoir calculer des limites**
- **Connaître la notion de continuité**

1 L'ensemble des réels

1.1 Les sous-ensembles de $\mathbb{R}$

Exemple 1. Qu'est ce qu'un nombre ?

Définition 1.
On distingue plusieurs sous-ensembles de l'ensemble des réels.

- L'ensemble des entiers naturels, noté $\mathbb{N}$.
- L'ensemble des entiers relatifs, noté $\mathbb{Z}$.
- L'ensemble des nombres décimaux (Nombre fini de chiffre après la virgule dans l'écriture décimale), $\mathbb{D}$.
- L'ensemble des nombres rationnels (Quotient de deux entiers relatifs), noté $\mathbb{Q}$. La partie décimale d'un nombre rationnel est périodique à partir d'un certain rang.
- L'ensemble des irrationnels (Les réels non rationnels).

1.2 La valeur absolue

Définition 2.
Soit x un réel. La valeur absolue de x est notée $|x|$, et l'on a :
$|x| = x$ si x est positif, $|x| = -x$ sinon.

Exemple 2.
Écrire sans valeur absolue $\left|\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-3}\right|$.

Propriété 1.

- $|-x| = |x|$
- Inégalités triangulaires : $||a| - |b|| \leqslant |a+b| \leqslant |a| + |b|$

- $\sqrt{x^2} = |x|$

Exemple 3.
Donner des exemples où les inégalités sont strictes, et où l'on a l'égalité dans les inégalités triangulaires.

La valeur absolue est souvent utilisée pour caractériser les réels appartenant à un intervalle, grâce à la propriété suivante :

Propriété 2.
Soit x, a deux réels et ε un réel strictement positif.
- $|x-a| = \text{distance}(a;x)$
- $|x-a| \leqslant \varepsilon \iff x \in [a-\varepsilon; a+\varepsilon]$

Exemple 4.
Représenter sur un axe les assertions précédentes.

2 Domaines de définition.

2.1 En mathématiques.

En mathématiques, une fonction est un opérateur qui a un ensemble de départ et un ensemble d'arrivée. Toutefois, dans la pratique, on donne souvent une expression mathématique pour définir une fonction, sans expliciter son ensemble de départ. Le **domaine de définition** d'une fonction définie par une expression est l'ensemble des nombres réels pour lesquels cette expression a du sens (c'est-à-dire que l'on a le droit d'effectuer toutes les opérations nécessaires à réaliser l'expression de la fonction).

Exemple 5.
Donner le domaine de définition des fonctions f et g définies par

$$f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^2-1}, \quad g(x) = \frac{\ln(x)}{x-2}.$$

2.2 Un exemple physique : la force d'attraction gravitationnelle

Dans la théorie Newtonienne, la valeur de la force d'attraction gravitationnelle entre deux points A et B a pour valeur

$$F_{AB} = G\frac{m_A m_B}{d^2}$$

où m_A et m_B sont respectivement les masses des points A et B, d est la distance entre les points A et B, et où G est une constante.

2.2.1 Grandeurs, variables et fonctions

Nous voyons dans l'égalité de l'exemple précédent, plusieurs lettres qui peuvent être interprétées de plusieurs façons suivant le contexte.
On peut par exemple utiliser cette formule uniquement d'un point de vue numérique, c'est à dire que l'on calcule une des valeurs à partir des autres :

On peut aussi considérer que la force F dépend des trois autres grandeurs. En mathématiques, on dira que F est une **fonction** à trois **variables** : m_A, m_B et d.

On peut aussi fixer deux des trois grandeurs, par exemple m_A et m_B. F sera alors une fonction à une variable, la variable d, et m_A et m_B seront appelées des **constantes**.

Exemple 6.
Comment note-on, en mathématiques, l'image de d par F ? Comment s'appelle d par rapport à $G\dfrac{m_A m_B}{d^2}$?

2.2.2 Ensemble de définition

Puisque l'on veut étudier le comportement de F en fonction de d, il faut connaître les valeurs possibles pour d. Cet ensemble est appelé **ensemble de définition** de la fonction F. Ici d peut prendre n'importe quelle valeur strictement positive, l'ensemble de définition de la fonction F est donc égal à $]0; +\infty[$.

Remarque 1.
Si la fonction F était donnée en dehors du contexte physique par $F(x) = G\dfrac{m_A m_B}{x^2}$, le domaine de définition de F serait $\mathbb{R}^*$. Le domaine de définition est donc différent selon que l'on considère la fonction dans un contexte de physique ou en mathématiques.

2.2.3 Limite de F lorsque la variable tend vers un réel

On ne peut pas calculer F pour $d = 0$, mais on peut calculer F pour des valeurs de d très proches de 0. En mathématiques, d peut être aussi proche que l'on veut de 0.

Exemple 7.
Que peut-on dire de $F(d)$ lorsque d s'approche aussi près que l'on veut de 0 ? Que pensez vous du résultat du point de vue physique ?

2.2.4 Limite de F lorsque la variable tend vers $+\infty$

On peut aussi regarder les valeurs de $F(d)$ lorsque d prend des valeurs aussi grandes que l'on veut.

Exemple 8.
Que peut-on dire de $F(d)$ lorsque d prend des valeurs aussi grandes que l'on veut ? Que pensez vous du résultat du point de vue physique ?

3 Opérations sur les limites.

La définition précise d'une limite sera formalisée dans un paragraphe ultérieur. Voyons déjà quelles sont les opérations usuelles que l'on a le droit de faire avec des limites. Dans la suite, a désigne soit un réel soit un infini.

3.1 Limite d'une somme

$\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) =$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) =$ $\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$m \in \mathbb{R}$			
$+\infty$			
$-\infty$			

3.2 Limite d'un produit

$\lim\limits_{x\to a}(f(x).g(x)) =$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) =$ $\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	$l > 0$	$l < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$m > 0$					
$m < 0$					
0					
$+\infty$					
$-\infty$					

3.3 Limite d'un quotient

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} =$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) =$ $\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	$l > 0$	$l < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$m > 0$					
$m < 0$					
0^+					
0^-					
$\pm\infty$					

Exemple 9.
Donner un exemple de forme indéterminée dans chacun des cas précédents.

Exemple 10. Pour chacun des exemples suivants, dire si l'on peut conclure ou non directement sur l'existence d'une limite.

1. $\sqrt{x+2} - \sin(x)$ quand $x \to 0$?
2. $\dfrac{\sqrt{x^2+2}}{2x+7}$ quand $x \to +\infty$?

0. FI = Forme Indéterminée, c'est à dire que l'on ne peut rien dire à l'avance, tous les cas sont possibles

3. $\dfrac{e^{-x}}{x^2}$ quand $x \to 0$? Quand $x \to +\infty$?
4. $x - \sqrt{x^2+7}$ quand $x \to +\infty$? Quand $x \to -\infty$?

3.4 Limite d'une composée de fonctions

Définition 3.
Soit f une fonction définie sur un ensemble I et g une fonction définie sur $f(I)$. Alors $g \circ f$ est la fonction définie sur I par $g \circ f(x) = g(f(x))$ pour tout $x \in I$.

Exemple 11.
1. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$ avec $f(x) = x+3$ et $g(x) = x^2 - 1$.
2. Déterminer deux fonctions f et g telles que $h = f \circ g$ avec $h(x) = \sqrt{x^4 + 2x^2 + 1}$.

Théorème 1.
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$ de sorte que la composée $g \circ f$ ait un sens.
1. Si f possède une limite (finie ou infinie) b en a alors b est un élément ou une borne de J
2. Si de plus g possède une limite (finie ou infinie) l en b, alors $g \circ f$ admet la limite l en a :

$$\begin{cases} f(x) \underset{x\to a}{\to} b \\ g(x) \underset{x\to b}{\to} l \end{cases} \Rightarrow g\left(f(x)\right) \underset{x\to a}{\to} l$$

Exemple 12.
Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$

3.5 Limites d'un polynôme et d'une fraction rationnelle en l'infini

Théorème 2.
La limite en $\pm\infty$ d'une fonction polynômiale P, c'est à dire une fonction qui à tout x associe un polynôme, soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ est égale à la limite en $\pm\infty$ du terme de plus haut degré de P soit $a_n x^n$, c'est à dire que l'on a :

$$\lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$$

Exemple 13. Déterminer la limite de $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ en $-\infty$.

Théorème 3.
La limite en $\pm\infty$ d'une fonction rationnelle Q, c'est à dire une fonction qui à tout x associe le quotient de 2 polynôme, soit $Q(x) = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$ est égale à la limite en $\pm\infty$ du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur de Q, c'est à dire que l'on a :

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

Exemple 14.
Déterminer les limites de $f(x) = \dfrac{2x^2+3x-1}{5x^2-x+3}$ en $+\infty$ et de $g(x) = \dfrac{2x^2+3x-1}{7x^3+x^2+3}$ en $-\infty$.

3.6 Limite avec les fonctions racines carrées

Il y a deux exemples types à connaître :

- Forme indéterminée en $+\infty$ de la forme $\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-4}}$: on factorise par $\sqrt{x}$ le numérateur et le dénominateur.
- Forme indéterminée de la forme $\sqrt{x+3}-\sqrt{x+7}$: on multiplie et on divise par la quantité conjuguée $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+7}$.

Exemple 15.
Justifier que les deux exemples types précédents sont bien des formes indéterminées puis calculer les limites en $+\infty$ à l'aide de la méthode proposée.

4 Limites et inégalités

4.1 Théorèmes

a est soit un réel soit l'infini.

Théorème 4. *Passage des inégalités larges à la limite*
Soient f, g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que f et g admettent toutes deux des limites finies l et m en a et que $f \leqslant g$ au voisinage de a alors : $l \leqslant m$

Exemple 16.
Si l'on a f, g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ telles que f et g admettent toutes deux des limites finies l et m en a et que $f < g$ au voisinage de a alors a t-on : $l < m$?

Théorème 5. *Théorème des Gendarmes*

Soient f, g, h trois fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que : $\begin{cases} f(x) \underset{x\to a}{\to} l \\ h(x) \underset{x\to a}{\to} l \end{cases}$ et $f \leqslant g \leqslant h$ au voisinage de a, alors $g(x) \underset{x\to a}{\to} l$

Exemple 17. Déterminer la limite en $+\infty$ de $\dfrac{\cos x}{x}$

Remarque 2. (Cas $l = 0$) En particulier, le théorème des gendarmes implique que $f(x) \underset{x\to a}{\to} 0$ si, et seulement si, $|f(x)| \underset{x\to a}{\to} 0$.

Propriété 3.

1. Soient f, g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On suppose $f(x) \underset{x\to a}{\to} +\infty$ et $f \leqslant g$ au voisinage de a, alors $g(x) \underset{x\to a}{\to} +\infty$

2. Soient f, g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On suppose $g(x) \underset{x \to a}{\to} -\infty$ et $f \leqslant g$ au voisinage de a, alors $f(x) \underset{x \to a}{\to} -\infty$

Exemple 18.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x + \cos x$. Que vaut : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$?

5 Théorème de la limite monotone

Théorème 6.
Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]a; b[$, avec a et b dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. Si f est monotone sur I, alors elle admet une limite finie ou infinie en a et en b.

Exemple 19.

1. Que peut-on dire de la limite d'une fonction f dans les cas suivants :
   (a) f est croissante ?
   (b) f est majorée ?
2. Quelle(s) condition(s) suffisante(s) doit-on avoir sur f pour que f admette une limite finie ? Ces conditions sont-elles des conditions nécessaires ?

6 Quantificateurs

6.1 Quantificateur universel $\forall$

"$\forall x \in E$" signifie :" **pour tout** élément x de E".

Exemple 20.
Écrire avec des symboles mathématiques : " le carré d'un nombre réel est toujours positif".

6.2 Quantificateur existentiel $\exists$ et $\exists!$

- "$\exists x \in E$" signifie : " **il existe** au moins un élément x de E".
- " / ", " : ", ",", "|" ou espace signifie : " tel que".
- "$\exists!$", signifie il existe un unique....

Exemple 21.
Écrire uniquement avec des symboles mathématiques :
" L'équation $2x^2 - x = 0$ admet une solution entière."
" 1 admet un unique antécédent par la fonction ln."

6.3 Négation des quantificateurs

Théorème 7.

1. non $(\forall x \in E \quad \mathrm{P}(x)) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists x \in E / \text{ non } \mathrm{P}(x))$
2. non $(\exists x \in E / \mathrm{P}(x)) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in E \quad \text{non } \mathrm{P}(x))$

Exemple 22.
Écrire la négation des propositions suivantes :
P : $\exists x \in \mathbb{R} : f(x) = 3$.
Q : $\forall y \in \mathbb{R}\ f(y)$ est un entier
R : $\forall y \in F \quad \exists x \in E \ / \ f(x) = y$

7 Définition de la notion de limite

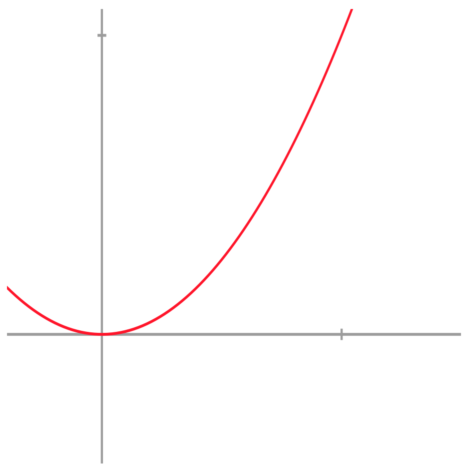
Dans tout ce paragraphe, on considère une fonction f d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$.
$a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

7.1 Limite finie en a

Définition 4.
Soit $l \in \mathbb{R}$.
Notation : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ ou $f(x) \underset{x \to a}{\rightarrow} l$, se lit : "$f$ admet l pour limite en a".

1. Cas où $a \in \mathbb{R}$: on dit que f admet l pour limite en a si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \backslash \{a\}, |x - a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon$$



Exemple 23. Écrire, en symboles mathématiques, que $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq l$.

2. Cas où $a = +\infty$: on dit que f admet l pour limite en $+\infty$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geqslant A \Rightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon$$

3. Cas où $a = -\infty$: on dit que f admet l pour limite en $-\infty$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \leqslant A \Rightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon$$

Intuitivement, l'assertion $\lim_{x \to a} f(x) = l$ a la signification suivante : quelque soit $\varepsilon > 0$, pour que $f(x)$ soit à distance $\leqslant \varepsilon$ de l, il suffit que x soit suffisamment voisin de a. Toutefois, il faut faire attention : cette formulation dissimule l'idée importante de la définition à savoir que le voisinage en question dépend de ε.

Exemple 24. Montrer que si $f(x) \underset{x \to +\infty}{\to} 1$, alors pour tout x suffisamment grand, $f(x) \geqslant 0$.

Théorème 8. *Unicité de la limite*
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et soit l et l' deux réels. On suppose que $\lim_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim_{x \to a} f(x) = l'$. Alors $l = l'$.

Remarque 3. La limite en un réel a est unique mais elle n'est pas forcément égale à $f(a)$.

7.2 Limite infinie en a

Dans ce paragraphe, a est une extrémité finie ou infinie de l'intervalle I.

Définition 5.
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

1. Cas où $a \in \mathbb{R}$: on dit que f admet $+\infty$ (respectivement $-\infty$) pour limite en a si et seulement si :
$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in I\backslash\{a\}, |x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow f(x) \geqslant B \text{ (respectivement, f(x)} \leqslant \text{B)}$$
2. Cas où $a = +\infty$: on dit que f admet $+\infty$ (respectivement $-\infty$) pour limite en $+\infty$ si et seulement si :
$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geqslant A \Rightarrow f(x) \geqslant B \text{ (respectivement, f(x)} \leqslant \text{B)}$$
3. Cas où $a = -\infty$: on dit que f admet $+\infty$ (respectivement $-\infty$) pour limite en $-\infty$ si et seulement si :
$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \leqslant A \Rightarrow f(x) \geqslant B \text{ (respectivement, f(x)} \leqslant \text{B)}$$

On note : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ respectivement $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

Exemple 25.
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et soit a un réel. Représenter une fonction f vérifiant la propriété suivante :
$$\exists \alpha \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0, |x-a| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon$$

7.2.1 Limite à droite, limite à gauche

Définition 6. *Limite à gauche*
On suppose que x_0 n'est pas la borne gauche de I. Si on étudie les valeurs de $f(x)$ uniquement pour $x < x_0$ et $x \in I$ alors on dit qu'on étudie la limite à gauche de f en x_0 et on note : $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$

Exemple 26. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x}$

Définition 7. *Limite à droite*
On suppose que x_0 n'est pas la borne droite de I. Si on étudie les valeurs de $f(x)$ uniquement pour $x > x_0$ et $x \in I$ alors on dit qu'on étudie la limite à droite de f en x_0 et on note : $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$

Exemple 27. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x}$

Propriété 4. On suppose que x_0 est un élément de I distinct des bornes de I. Alors f admet une limite en x_0 si et seulement si la limite à droite est égale à la limite à gauche. La limite de f en x_0 est alors égale à la limite à droite ou à gauche en x_0.

Remarque 4.
Si x_0 est une des bornes de I alors :

- Si $I =]x_0; ...$ ou $I = [x_0; ..$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$.
- Si $I = ...; x_0[$ ou $I = ...; x_0]$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$.

Exemple 28. On considère la fonction : $\delta : \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x = 0 \\ \dfrac{|x|}{x} \text{ si } x \neq 0 \end{cases} \end{array}$

δ admet-elle une limite en 0 ?

Exemple 29. La fonction suivante admet-elle une limite en 0 ? $f : \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x}, \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases} \end{array}$

8 Continuité

8.1 Fonction continue

On étudie ici la limite d'une fonction en un point où elle est définie

Définition 8.
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

1. Soit $x_0 \in I$. f est continue en x_0 signifie que :
   - f admet une limite finie en x_0
   - $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

   Si une de ces deux conditions n'est pas réalisée, on dit que f est discontinue en x_0.
2. On dit que f est continue sur I si et seulement si elle est continue en tout point x_0 de I.

Exemple 30.
La fonction δ définie dans l'exemple 28 est elle continue en 0 ?

Propriété 5.
Si f est continue en a et si g est continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a

Exemple 31.
Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(\sqrt{x}+1)$. f est-elle continue en 0 ?

Propriété 6.
Soit f une fonction définie comme opérations de fonctions usuelles (sin, cos, fonctions rationnelles...). alors f est continue sur son domaine de définition.

Remarque 5.
Pour étudier la continuité d'une fonction sur un ensemble, on utilise la propriété précédente sur l'ensemble où f une fonction définie comme opérations de fonctions usuelles, et on utilise la définition 8 pour les autres réels.

Exemple 32.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

8.2 Prolongement par continuité

Définition 9.
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, et soit a une borne de I. Si f admet une limite l en a, on dit que l'on **prolonge f par continuité en a** en posant $f(a) = l$.

Exemple 33.
Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

Peut-on prolonger f en 0 ?

8.3 Image d'un intervalle par une fonction continue

Définition 10.
Soit I un sous ensemble de $\mathbb{R}$. L'image de I par f est l'ensemble de tous les réels $f(x)$ où $x \in I$. On note cet ensemble $f(I)$ et on a donc $f(I) = \{f(x)/x \in I\}$

Exemple 34.
Déterminer $f(I)$ avec $I = [-1; 3]$ et f la fonction carrée.

Propriété 7.
L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Exemple 35.
Donner l'image de $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$ par la fonction sinus.

Propriété 8.
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$
Si f est croissante, l'image de $[a, b]$ par f est $[f(a); f(b)]$.
Si f est décroissante, l'image de $]a, b]$ par f est $[f(b); f(a)[$.

Exemple 36.
Montrer que si f est continue et non monotone la propriété précédente est fausse.

Remarque 6.

- Si f est définie sur $]a; b]$ et f admet une limite en a, alors on remplace $f(a)$ par $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x)$.
- La propriété précédente peut aussi être appliquée à tout type d'intervalle.

Remarque 7. La proposition précédente permet de déterminer l'image de I par f en utilisant un tableau de variations.

Exemple 37. Retrouver le résultat des exemples précédents en utilisant un tableau de variations.

Exercices

Exercice 1.
Développer les expressions suivantes :

1. $(x-1)(x+2)-x(x-1)$
2. $(a-b)(a+b)$
3. $(-3x-1)^2$

Exercice 2.
factoriser les expressions suivantes :

1. $2x^3-5x^2$
2. $x^2-1+(3x-2)(x+1)$
3. $(x-1)(3x+2)+(5x-3)(-x+1)$
4. $2np-px+p$
5. $3a^2b+ab-4ab^2$
6. x^n+nx^{2n}
7. 2^n+8^n

Exercice 3.
Réduire les fractions suivantes et indiquer leur ensemble de définition :

1. $\dfrac{3x+2}{6x+4}$
2. $\dfrac{x^3+2x+x}{x}$
3. $\dfrac{2+3b}{2}$
4. $\dfrac{2ab+b}{3b-4ab}$
5. $\dfrac{\dfrac{x+2}{x+3}}{\dfrac{x-1}{5x+2}}$
6. $\dfrac{\dfrac{3a-1}{2a+1}+2}{\dfrac{2+a}{3-a}+3}$

Exercice 4.
Simplifier les expressions suivantes :

1. $\sqrt{9x+9}$
2. $\sqrt{2^5}$
3. $\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}}}$

Exercice 5.
Déterminer les réels x tels que :

1. $|x-2|<3$
2. $|x+4|<-1$
3. $|x+5|\leqslant 3$
4. $|x+2|\geqslant 5$
5. $|x+5|\geqslant -1$
6. $|x-2|<5$ et $|x-3|\leqslant 4$
7. $|x+1|<1$ ou $|x+2|\leqslant 4$
8. $|x-5|<2$ et $|x+1|\leqslant 1$
9. $|x-2|<4$ ou $|x+2|\leqslant 2$

Exercice 6.
Soit a et b deux réels. Déterminer en fonction de a et b les réels α et β tels que :
$x \in [a;b] \Longleftrightarrow |x-\alpha| \leqslant \beta$.

Exercice 7.
Déterminer les points $M(x;y)$ du plan tels que :

1. $|x+y| = 2$
2. $|x+y| \leqslant 2$
3. $|x| + |y| \leqslant 3$

Exercice 8.
Donner le domaine de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$;
2. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$
3. $f(x) = \sqrt{-2x+3}$

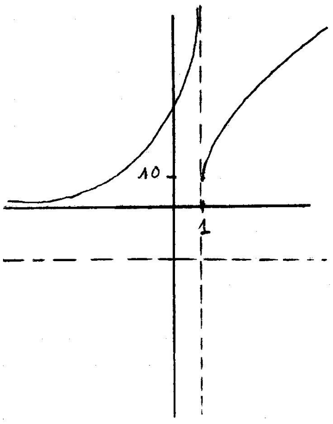
Exercice 9.
Écrire les expressions ci-dessous avec la notation mathématique usuelle (f pour les fonctions et x pour la variable), puis donner le domaine de définition de chacune de ces fonctions.

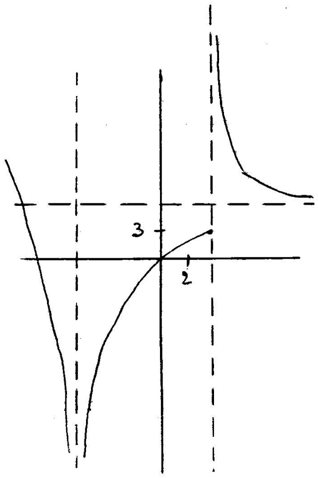
1. $H = \dfrac{r+\omega}{\lambda\omega(1-\omega^2)}$ (H est appelée fonction de transfert).
2. $z = \dfrac{g}{2}t^2$ (z est la distance parcourue par une bille dans une chute libre).
3. $P = \dfrac{nRT}{V}$ (P est la pression en thermodynamique).
4. $F = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1q_2}{r^2}$ (F est le champ électrostatique créé par deux charges).

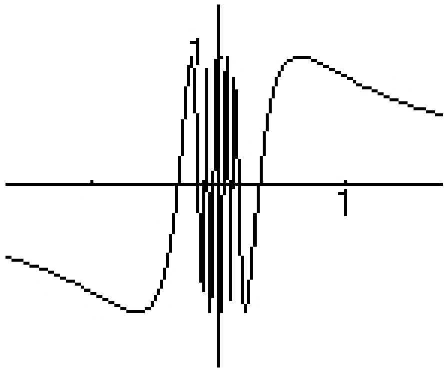
Exercice 10.
Dans chacun des cas suivants, représenter une allure possible de la courbe sachant que :

1. $\lim\limits_{2^+} f = 3$, $\lim\limits_{2^-} f = -\infty$, $\lim\limits_{+\infty} f = 5$ et $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$.
2. $\lim\limits_{-1^+} f = -\infty$, $\lim\limits_{-1^-} f = 0$, $\lim\limits_{-\infty} f = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$.

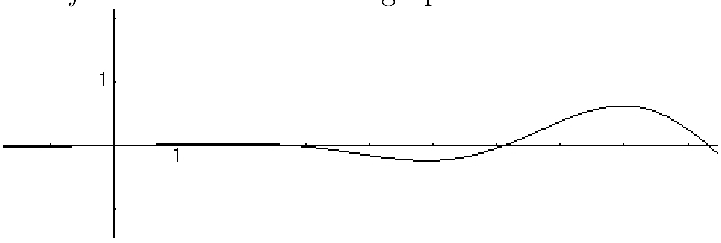
Exercice 11.
Dans les exemples suivants, conjecturez les limites de f ? Expliquez pourquoi ce ne sont que des conjectures ?







Exercice 12.
Soit f une fonction dont le graphe est le suivant :



1. Conjecturez la limite de f en 0.
2. L'expression de la fonction f est : $f(x) = 10^{-2}(10 + x^2)\sin\dfrac{1 + x^2}{x}$.
   Tracer cette fonction à l'aide de votre calculatrice. Obtenez vous la même courbe ?
3. En regardant simplement l'expression de f, donner l'allure de la représentation de f sur $[-1; 1]$.
4. Faire apparaître la courbe précédente sur votre calculatrice.
5. Une représentation graphique est-elle fiable pour déterminer une limite ?

Exercice 13. 1. Étudier la limite en $+\infty$ des deux quantités suivantes :

$$a)\ \frac{3x+7}{6x-13} + \frac{14x^2+2}{7x^2+31x-4} - 5 + \frac{1}{3x+4}, \qquad b)\ x + 2 + \left(\frac{\sin(x) - 3 + \ln(x)}{4 + \sqrt{x}}\right)^2.$$

2. Étudier les limites éventuelles en $+\infty$ puis en $-\infty$ de l'expression

$$\frac{e^x + 1 + \frac{1}{x}}{e^x + 4}.$$

3. Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + 2\,|x|}{x} \qquad b)\ \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2 + 2\,|x|}{x} \qquad c)\ \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3\,x + 2}$$

$$d)\ \lim_{x\to \pi} \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos x} \qquad e)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x} \qquad f)\ \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$$

Exercice 14.
Déterminer les limites des fonctions suivantes.

1. $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{Rt^2+C}{R^2\omega t^2+C}$
2. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{Rt^2+C}{R^2\omega t^2+C}$
3. $\lim\limits_{t\to+\infty} N_0e^{-kt}$.

Exercice 15.
Déterminer la limite des fonctions suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x-3\cos x$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} x+\sin x$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\cos x}{x-\sin x}$

Exercice 16.
Dans chacun des cas, représenter une fonction vérifiant la proposition.

1. $\exists l \in \mathbb{R} : \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \exists x \in [a,b] : f(x) = l$
2. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \exists l \in \mathbb{R} \exists x \in [a,b] : f(x) = l$

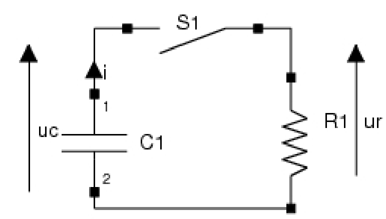
Exercice 17.
Ecrire, à l'aide de symboles mathématiques, qu'une fonction n'admet pas de limite finie en $+\infty$.

Exercice 18.
Les fonctions suivantes sont-elles continues en a ?

1. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{|x|}}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$, avec $a = 0$.
2. $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x^2+3x-4}$ pour $x \neq 1$ et $x \neq -4$ et $f(1) = 10$ avec $a = 1$.

Exercice 19.
Donner un exemple de fonction, différent de ceux déjà vus, admettant une limite finie en a, mais non continue en a.

Exercice 20.
On considère le circuit électrique ci-dessous.



Lorsque le circuit est fermé, on a $U_c = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$ et $U_r = U_c$ avec τ une constante positive.

1. Donner le domaine de définition de U_c et U_r.
2. Étudier la continuité de ces deux fonctions sur leur domaine de définition.
3. Déterminer la limite de U_C lorsque t tend vers $+\infty$ et interpréter physiquement le résultat.

Exercice 21.
Étudier la possibilité de prolonger les fonctions données aux points donnés :

1. $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ en $x=2$
2. $f(x) = \dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+3}}$ en $x=-3$
3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-1}$ en $x=1$

Exercice 22.

1. Déterminer l'image de]-5 ;0] par la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-3 \leqslant x^2 < 7$.
3. Déterminer l'ensemble des réels I tel que $f(I) = J$ avec la fonction f définie par $f(x) = e^{-x^2}$ et $J = [-2; 5]$.

Exercice 23.
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Peut-on avoir f continue et f non strictement croissante sur $[a;b]$ et $f([a;b]) = [f(a); f(b)]$?
2. Peut-on avoir f non continue en $c \in]a;b[$ et strictement croissante sur $[a;b]$ et $f([a;b]) = [f(a); f(b)]$?
3. Énoncer la réciproque de la ligne 1 de la propriété 8.
4. Cette réciproque est-elle vraie ?

Exercice 24.
Soit f la fonction définie par $f(x) = (-1)^{E(x)}(x - E(x))$ où $E(x)$ représente la partie entière de x c'est à dire le plus grand entier inférieur ou égal à x. Étudier la continuité de f.