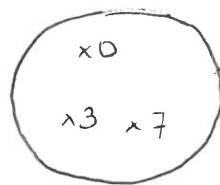
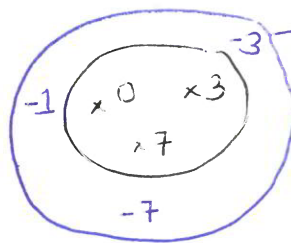


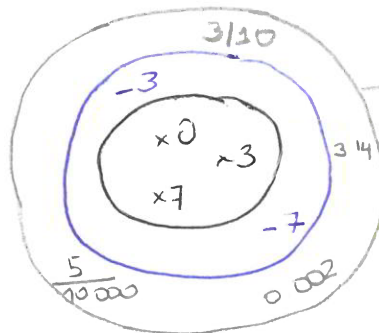
LES ENSEMBLES



$\mathbb{N}$ = ensemble des entiers naturels

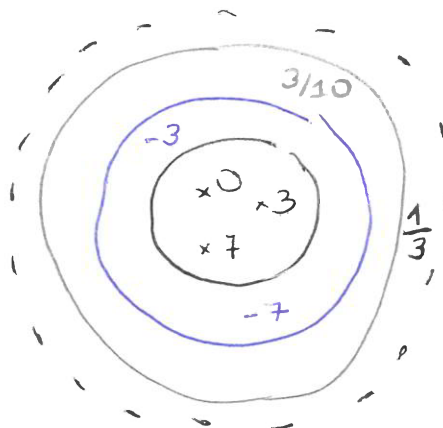


$\mathbb{Z}$ = ensemble des entiers relatifs

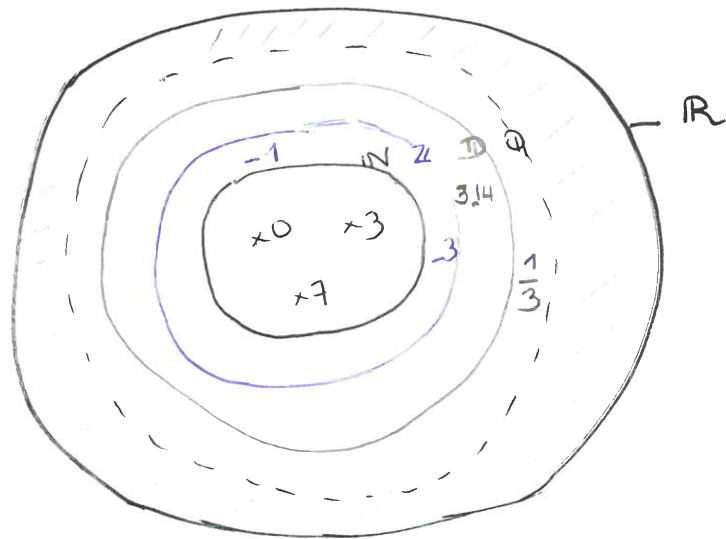


$\mathbb{D}$ = ensemble des nombres décimaux

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$$



$\mathbb{Q}$ = ensemble des rationnels



Irrationnels

$$\sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

$$\pi \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

LES COMPLEXES

Ex: $z_1 = 3 + 2i$ $\text{Re}(z_1) = 3$ $\text{Im}(z_1) = 2$
 $z_2 = 1 - 2i$ $\text{Re}(z_2) = 1$ $\text{Im}(z_2) = -2$

Ex: conjugué

$$z = 1 - i \quad \bar{z} = 1 + i$$

Ex: calculs

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (3 + 2i) + (1 - 2i) \\ &= 4 + (2i - 2i) \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$z_1 z_2 = (3+2i)(1-2i)$$

$$= 3 - 6i + 2i - 4i^2 \quad \text{or } i^2 = -1$$

$$= 3 - 6i + 2i + 4$$

$$= 7 - 4i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+2i}{1-2i} = \frac{(3+2i) \cdot (1+2i)}{(1-2i) \cdot (1+2i)} = \frac{3+6i+2i-4}{1+4} = \frac{-1+8i}{5}$$

$$= -\frac{1}{5} + \frac{8}{5}i$$

$$(-1+i)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i \quad z^2 + 2z + 2 = -2i + 2(-1+i) + 2 = 0$$

IMPLICATION - EQUIVALENCE

Ex: Et/OU

P: "136 est un multiple de 17"

P est vraie car $136 = 17 \times 8$

Q: "2 divise 167"

Q est fausse

ainsi P et Q est fausse
P ou Q est vraie

Ex:

$$P \Rightarrow Q$$

P est dite suffisante par Q

$$? \Rightarrow A$$

$$A = "x^2 = 9"$$

$$? \Rightarrow B$$

$$B: "x > 1"$$

" $x = 3$ " est une condition suffisante pour A

" $x = 2$ " _____ pour B

$$P \Rightarrow Q$$

Q est dite nécessaire pour P

$$A \Rightarrow ?$$

$$B \Rightarrow ?$$

? sera nécessaire par A
par B

$A \Rightarrow x^2 > 4$: " $x^2 > 4$ " n'est pas une condition suffisante par A
mais une condition nécessaire.
(Si $x^2 = 25$ alors $x^2 > 4$ mais $x^2 \neq 9$)

$B \Rightarrow x$ est positif.

x positif est une condition nécessaire par B mais pas
suffisante (en effet $x = 1/2$ $x > 0$ mais $x < 1$).

$$x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = -3$$

Ex: $x = \sqrt{2-x} \quad (E)$

$$D_{\sqrt{2-x}} = \{x \in \mathbb{R} / 2-x \geq 0\} =]-\infty, +2]$$

$$(E) \Leftrightarrow x \in]-\infty, 2] \text{ ET } x \geq 0 \text{ ET } x = \sqrt{2-x}$$

$$(E) \Leftrightarrow x \in [0, 2] \text{ ET } x^2 = 2-x$$

$$(E) \Leftrightarrow x \in [0, 2] \text{ ET } x^2 + x - 2 = 0$$

$$(E) \Leftrightarrow x \in [0, 2] \text{ ET } (x = 1 \text{ ou } x = -2)$$

$$S_{(E)} = \{1\} \text{ car } -2 \notin [0, 2]$$

Ex: quantificateurs

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geq 0$$

Ex

$$\exists x \in \mathbb{Z} / 2x^2 - x = 0$$

$$\exists! x \in \mathbb{R}^{*+} / \ln x = 1$$

Ex: négation des quantificateurs

$$P: \exists x \in \mathbb{R} : f(x) = 3$$

$$\text{non}(P) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \neq 3$$

$$Q: \forall y \in \mathbb{R}, \quad f(y) \text{ est un entier}$$

$$\text{non}(Q) \Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{R} / f(y) \text{ ne soit pas un entier}$$

$$R: \forall y \in F \quad \exists x \in E / f(x) = y$$

$$\text{non}(R) \Leftrightarrow \exists y \in F / \forall x \in E \quad f(x) \neq y$$

$$S: \exists \alpha > 0; \underbrace{x \in]-\alpha, \alpha[}_{A} \Rightarrow \underbrace{f(x) \in]-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}[}_{B}$$

$$\text{non}(S) \Leftrightarrow \forall \alpha > 0; \quad x \in]-\alpha, \alpha[\text{ ET } f(x) \notin]-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}[$$

$$\text{car } \text{non}(A \Rightarrow B) : A \text{ ET } \text{non}(B)$$

LES RAISONNEMENTS

Ex: Raisonnement par récurrence

$$P(n): \quad " \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} "$$

• Initialisation:

$$P(1) \text{ est vraie car } \sum_{k=1}^1 k = 1 \text{ et } \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

• Hérédité: Supposons $P(n)$ vraie pour un entier $n, n \geq 1$ alors

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^n k + (n+1)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

par hypothèse de récurrence (HIR)

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$P(n+1)$ vraie d'où

• Conclusion: $\forall n \geq 1, P(n)$ vraie

Ex: Raisonnement par l'absurde

supposons que 0 ait un inverse alors $\exists b \in \mathbb{R} / 0.b = 1$ contradiction

Ex: Raisonnement par contraposée On veut démontrer $P \Rightarrow Q$

avec $P: "m^2 \text{ pair}"$ $Q: "m \text{ pair}"$

non $Q: "m \text{ est impair}"$ ainsi $\exists k \in \mathbb{N} / m = 2k+1$

$$\text{alors } m^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 \text{ avec } K = 2k^2 + 2k$$

ainsi $"m^2 \text{ est impair}"$

$$(\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$$

SIMPLIFICATIONS

4

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n$$

Ex: $2! = 1 \times 2 = 2$

$$3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$$

$$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

Ex:

$$\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{(n-1)! \cdot n}{(n-1)!} = n$$

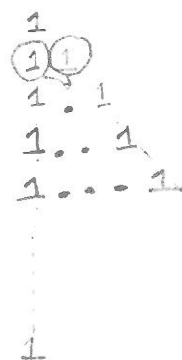
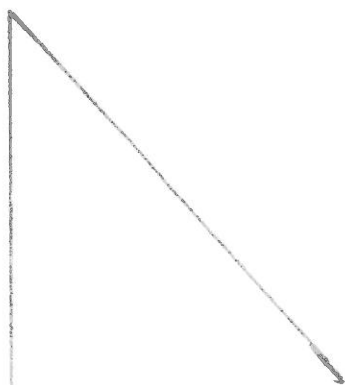
$$\frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{(n-1)!}{(n-1)! \cdot n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

Ex: $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot n!} = 1$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1! \cdot (n-1)!} = n$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Ex: Triangle de Pascal



1										
1	1									
1	2	1								
1	3	3	1							
1	4	6	4	1						
1	5	10	10	5	1					

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$\vdots$

Ex:

$$(2x-1)^3 = (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2x \cdot 1^2 - 1$$

$$= 8x^3 - 12x + 6x - 1$$

$$x^2 - 9 + (2x-3)(x-3)$$

$$= (x-3)(x+3) + (2x-3)(x-3)$$

$$= (x-3) [x+3+2x-3]$$

$$= 3x(x-3)$$

Ex:

$$\frac{\frac{11}{4} - \frac{1}{2}}{\frac{7}{3} + \frac{5}{6}} = \frac{\frac{11-2}{4}}{\frac{14+5}{6}} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{19}{6}} = \frac{5}{4} \times \frac{6}{19} = \frac{9 \times 3 \times \cancel{2}}{2 \times \cancel{2} \times 19} = \frac{27}{38}$$

Ex:

• $\frac{\sqrt{x}}{x}$ n'existe que si $x \geq 0$ ET $x \neq 0$ donc que si $x \in \mathbb{R}^{+*}$

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{x^{1/2}}{x} = \frac{1}{x^{1/2}} = x^{-1/2}$$

• $\frac{x}{\sqrt{-x}}$ n'existe que si $-x \geq 0$ et $\sqrt{-x} \neq 0$ à savoir $x \in \mathbb{R}^{-*}$,

$\forall x \in \mathbb{R}^{-*},$

$$\frac{x}{\sqrt{-x}} = \frac{-(-x)}{\sqrt{-x}} = \frac{-\sqrt{-x}\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}} = -\sqrt{-x}$$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\},$

$$(x+1) \cdot \left(\frac{1}{x+1}\right)^{-3} = (x+1) \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{x+1}\right)^3} = (x+1) \cdot \frac{1}{\frac{1}{(x+1)^3}} = (x+1)^4$$

RESOLUTION D'EQUATIONS ET INEQUATIONS

Ex: $(x-3)(x^2+x)=0 \Leftrightarrow x-3=0$ ou $x^2+x=0$
 $\Leftrightarrow x=3$ ou $x(x+1)=0$
 $\Leftrightarrow x=3$ ou $x=0$ ou $x+1=0$
 $\Leftrightarrow x=3$ ou $x=0$ ou $x=-1$

x	$-\infty$	-1	0	3	$+\infty$
$x-3$		-	-	- 0 +	+
x^2+x		+	0 -	0 +	+
$(x-3)(x^2+x)$		-	0 +	0 -	+

$a_1 = 1$
 $a_2 = 1$

$(x-3)(x^2+x) \geq 0 \quad (E)$
 $(E) \Leftrightarrow x \in [-1, 0] \cup [3, +\infty[$

• Ex: $3x-1 \leq 0$
 $\Leftrightarrow x \in]-\infty, \frac{1}{3}]$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$3x-1$	-	0	+

$a=3$

• Ex: forme canonique

$$\underbrace{x^2 - 2x + 3}_{\text{forme canonique}} = (x-1)^2 - 1 + 3 = (x-1)^2 + 2$$

• Ex: Résolution d'équations de degré 2

(1) $x^2 - 4 = 0$

(1) $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $(x-2)(x+2) = 0$

(1) $\Leftrightarrow \text{---}$ et $x=2$ ou $x=-2$

$S_{(1)} = \{-2, 2\}$

(2) $x^2 - 5x = 0$

(2) $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $x(x-5) = 0$

(2) $\Leftrightarrow \text{---}$ et $x=0$ ou $x=5$

$S_{(2)} = \{0, 5\}$

(3) $x^2 + 1 = 0$

(3) n'a pas de solutions réelles car un carré est toujours positif.

$S_{(3)} = \emptyset$

(4) $x^2 - 2x + 5 = 2$

(4) $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $x^2 - 2x + 3 = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3$
 $= 4 - 12$

$\Delta < 0$

donc (4) n'admet pas de racines réelles

$S_{(4)} = \emptyset$

(5) $x^2 + x + 1 \geq 0$

$\Delta = 1^2 - 4 \quad \Delta < 0$

$x^2 + x + 1$ n'a pas de racines réelles donc est toujours du signe de a (ici $a=+1$)

$S_{(5)} = \mathbb{R}$

(6) $x^2 - 4x - 77 \geq 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot (-77)$
 $= 16 + 308$
 $= 324 = 18 \times 18$

(6)

$x^2 - 4x - 77$ est donc un trinôme du second degré admettant 2 racines réelles :

$$x_1 = \frac{4-18}{2} = -7 \quad x_2 = \frac{4+18}{2} = 11$$

x	$-\infty$	-7		11	$+\infty$
x^2					
$-4x$	+	0	-	0	+
-77					

$$a = 1$$

$$S(6) =]-\infty, -7] \cup [11, +\infty[$$

(7) Si (x, y) sont tels que $x+y=8$ et $xy=12$ alors on peut résoudre de l'équation $x^2 - 8x + 12 = 0$

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 12 = 64 - 48 = 16$$

ayant pour racines $\frac{8-4}{2} = 2$ et $\frac{8+4}{2} = 6$.

donc $(x, y) = (2, 6)$ ou $(x, y) = (6, 2)$

Réciproquement ces deux couples $(2, 6)$ et $(6, 2)$ sont solutions de $x+y=8$ et $xy=12$.

Ex:

$$\begin{aligned} x^3 - 8 &= x^3 - 2^3 = (x-2)(x^2 + 2x + 4) \\ x^3 - 8 &= 0 \quad (\Rightarrow) \quad x-2=0 \text{ ou } x^2 + 2x + 4=0 \\ &\quad (\Rightarrow) \quad x=2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 2^2 - 4 \cdot 4 \\ \Delta &< 0 \end{aligned}$$

$$S(1) = \{2\}$$

2) Notons $P(x) = -4x^3 + 16x^2 - 4x - 24$

$$\begin{aligned} P(2) &= -4 \cdot 8 + 16 \cdot 4 - 4 - 24 \\ &= -32 + 64 - 32 \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc on peut factoriser P par $x-2$

$$\begin{array}{r|l}
 -4x^3 + 16x^2 - 4x - 24 & x-2 \\
 +4x^3 - 8x^2 & \hline
 \hline
 8x^2 - 4x - 24 & -4x^2 + 8x + 12 \\
 -8x^2 + 16x & \\
 \hline
 12x - 24 & \\
 -12x + 24 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 P(x) &= (x-2)(-4x^2+8x+12) \\
 &= -4(x-2)(x^2-2x-3)
 \end{aligned}$$

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow x-2=0 \vee x^2-2x-3=0$$

$$\Leftrightarrow x=2 \vee x=3 \vee x=-1$$

$$S_{(2)} = \{-1, 2, 3\}$$

$$3) \quad x^3 - 2x^2 + x \leq 0$$

$$x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2$$

$$(3) \Leftrightarrow x(x-1)^2 \leq 0$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x	$-$	$\emptyset$	$+$	$+$
$(x-1)^2$	$+$	$+$	$\emptyset$	$+$
$x(x-1)^2$	$-$	$\emptyset$	$+$	$+$

$$S =]-\infty, 0] \cup \{1\}$$

• (1) $\frac{x^2 - x + 1}{x + 1} = 3$

(1) $\Rightarrow x \neq -1$ ET $x^2 - x + 1 = 3(x + 1)$

(1) $\Rightarrow x \neq -1$ ET $x^2 - 4x - 2 = 0$

(1) $\Rightarrow x \neq -1$ ET $\left(x = \frac{4 - 2\sqrt{6}}{2} = 2 - \sqrt{6} \right.$

ou $x = \frac{4 + 2\sqrt{6}}{2} = 2 + \sqrt{6}$

or $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot (-2)$
 $= 16 + 8$
 $= 24$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{4 \times 6} = 2\sqrt{6}$

$S = \{2 - \sqrt{6}, 2 + \sqrt{6}\}$

• (2) $\frac{x^2 - 2x + 1}{x - x^2}$

$D(2) = \{x \in \mathbb{R} / x - x^2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

$\forall x \in D(2), \frac{x^2 - 2x + 1}{x - x^2} = \frac{(x-1)^2}{x(1-x)} = \frac{(x-1)(x-1)}{x(1-x)} = \frac{-(x-1)}{x} = \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1$

(2) bis $\frac{x^2 - 2x + 1}{x - x^2} \leq 3$

(2) bis $\Rightarrow x \in D(2)$ ET $\frac{1-x}{x} \leq 3$

(2) bis $\Rightarrow$ _____ ET $\frac{1-x}{x} - 3 \leq 0$

(2) bis $\Rightarrow$ _____ $\frac{1-x-3x}{x} \leq 0$

(2) bis $\Rightarrow$ _____ $\frac{1-4x}{x} \leq 0$

or un quotient lorsqu'il existe
est de signe du produit
 $x(1-4x)$

x	$-\infty$	0	1/4	1	$+\infty$
$x(1-4x)$	-	0	+	0	-

$a = -4$

$S_{(2) \text{ bis}} =]-\infty, 0] \cup [1/4, 1[\cup]1, +\infty[$

LES SYSTEMES LINEAIRES 2x2

Ex:

$$(S) \begin{cases} 2x + y = 3 & (L_1) \\ -4x + 5y = 1 & (L_2) \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 7y = 7 \\ -10x - 4x = -15 + 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2 \\ L_2 \leftarrow -5L_1 + L_2 \end{array}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

VALEURS ABSOLUES

Ex:

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{2} - 1 \geq 0 \\ \sqrt{2} - 3 \leq 0 \end{array} \right\} \text{ donc } \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-3} \leq 0$$

ainsi $\left| \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-3} \right| = - \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-3} \right)$

Ex:

$$\begin{array}{ll} a = 1 & b = 2 \\ |a| = 1 & |b| = 2 \\ a+b = 3 & |a+b| = 3 \\ \text{ici } |a+b| = |a| + |b| \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} a = -1 & b = -2 \\ |a| = 1 & |b| = 2 \\ a+b = -3 & |a+b| = 3 \\ \text{ainsi ici aussi} & \\ |a+b| = |a| + |b| & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} a = -1 \text{ et } b = 2 \\ |a| = 1 & |b| = 2 \\ a+b = 1 & |a+b| = 1 \\ \text{ici } |a+b| < |a| + |b| \end{array}$$

Ex valeurs absolues

8

$$(1) |x-1| = -1$$

impossible car une valeur absolue est toujours positive

$$S(1) = \emptyset$$

$$(2) |2x+3| \geq 4$$

$$(2) \Leftrightarrow 2x+3 \leq -4 \quad \text{ou} \quad 2x+3 \geq 4$$

$$(2) \Leftrightarrow 2x \leq -7 \quad \text{ou} \quad 2x \geq 1$$

$$(2) \Leftrightarrow x \leq -7/2 \quad \text{ou} \quad x \geq 1/2$$

$$S(2) =]-\infty, -7/2] \cup [1/2, +\infty[$$