LIMITES ET CONTINUITÉ

Exemple 1 :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 1 \neq 0\}$$
$$= \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$
$$=]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$$

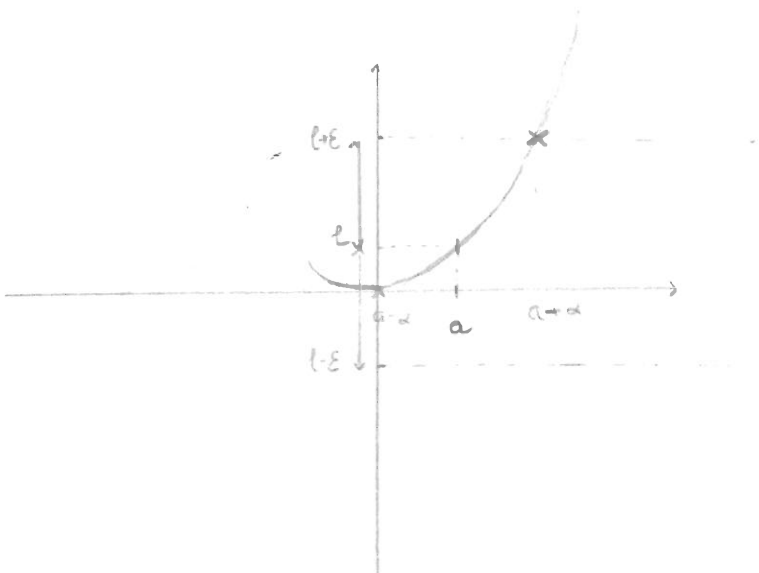
$$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ ET } x - 2 \neq 0\}$$
$$=]0, 2[\cup]2, +\infty[$$

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} / x^3 \geqslant 0 \text{ ET } x \neq 0\}$$
$$=]0, +\infty[$$

Def 1

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \iff \boxed{\forall \varepsilon > 0} \; \boxed{\exists \alpha > 0 \; \forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[, |x-a| \leq \alpha} \Rightarrow \boxed{|f(x) - \ell| \leq \varepsilon}$$

Illustration



$$\text{non}\left(\lim_{x \to a} f(x) = \ell\right) \iff \exists \varepsilon > 0 / \forall \alpha > 0, \exists x \in]a-\alpha, a+\alpha[/ |x-a| \leq \alpha \text{ ET } |f(x) - \ell| > \varepsilon$$

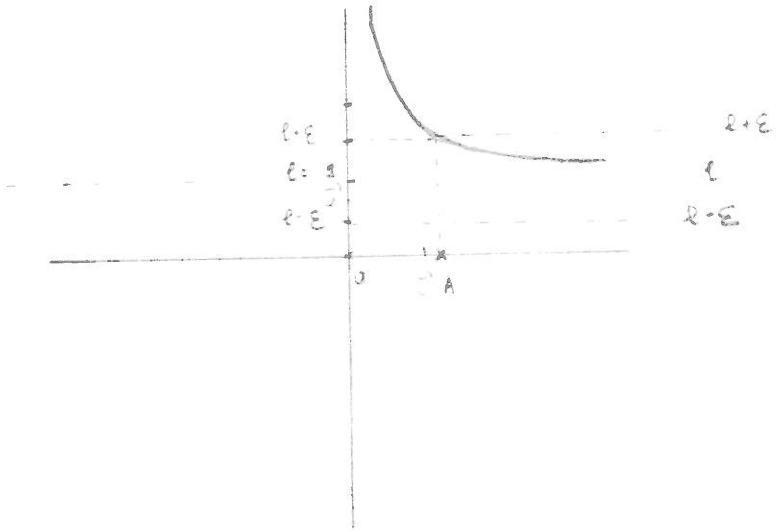
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\forall \varepsilon > 0}$ $\boxed{\exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \geq A}$ $\Rightarrow$ $\boxed{|f(x) - \ell| \leq \varepsilon}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\forall \varepsilon > 0}$ $\boxed{\exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \leq A}$ $\Rightarrow$ $\boxed{|f(x) - \ell| \leq \varepsilon}$

Illustrat°



Ex 3 :

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I,\ x \geq A$ $\Rightarrow$ $|f(x) - 1| \leq \varepsilon$

$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I\ x \geq A$ $\Rightarrow$ $-\varepsilon \leq f(x) - 1 \leq \varepsilon$

$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I$ $x \geq A$ $\Rightarrow$ $1 - \varepsilon \leq f(x) \leq 1 + \varepsilon$

pour $\varepsilon = 1$ $\exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I$ $x \geq A$ $\Rightarrow$ $f(x) \geqslant 0$

$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$

$\forall B \in \mathbb{R}$ | $f(x) \geq B$

- le bloc 2 va traduire "$x \to a$"

$\exists \alpha > 0 \quad \forall x \in I, \text{alors}, |x - a| \leq \alpha$

- le bloc 2 va traduire "$x \to +\infty$"

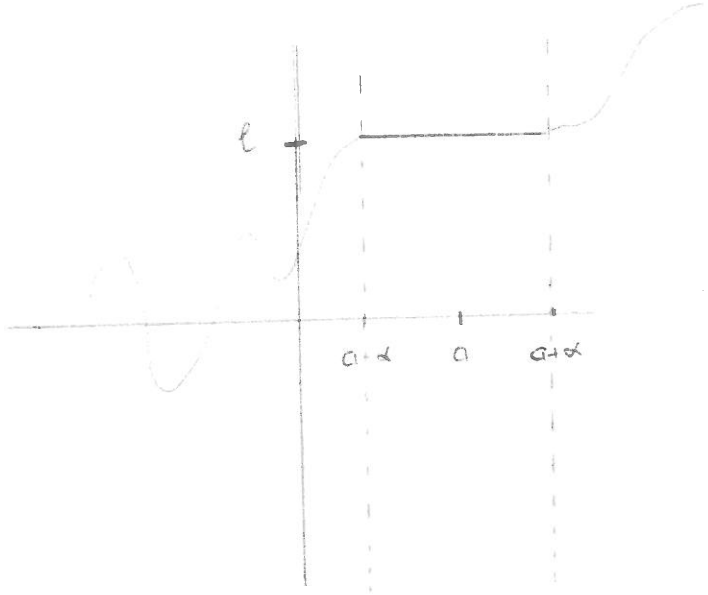
$\exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad x \geq A$

- le bloc 2 va traduire $x \to -\infty$

$\exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I \quad x \leq A$

Ex 4:

$\exists \alpha \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0, \ |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$



Ex 5 :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

Ex 6 :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$$

Ex 7 :

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

si $x > 0$ $\quad |x| = x \quad \delta(x) = \dfrac{|x|}{x} = \dfrac{x}{x} = 1$

si $x < 0$ $\quad |x| = -x \quad \delta(x) = \dfrac{|x|}{x} = \dfrac{-x}{x} = -1$

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \delta(x) = 1$ $\quad \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \delta(x) = -1$

$-1 \neq 1$ donc f n'admet pas de limite en 0.

Ex 8 :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \sqrt{x} = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} (-x) = 0$$

donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

Ex 9 : Illustration des F. I

F. I "$+\infty - \infty$" $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - x)$

F. I "$0 \times \infty$" $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x} \cdot \sqrt{x} \right)$

F. I "$\dfrac{0}{0}$" $\quad \lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x-1}{x^2-1} \right)$

F. I "$\dfrac{\infty}{\infty}$" $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2} \right)$

Ex 10:

1) $\lim_{x \to 0} (\sqrt{x+2} - \sin x) = \sqrt{2}$

car $\sin 0 = 0$

2) $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+2}) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} (2x+7) = +\infty$

} F.I "$\frac{\infty}{\infty}$"

3) $x \to 0 \quad e^{-x} \to 1$ donc $\lim_{x \to 0} \frac{e^{-x}}{x^2} = +\infty$

$x \to +\infty \quad e^{-x} \to 0$ donc $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} \cdot \frac{1}{x^2} = 0$

4) $\lim (x - \sqrt{x^2+7})$ F.I "$+\infty - \infty$"

$x \to +\infty$

$x \to -\infty \quad -\sqrt{x^2+7} \to -\infty$ donc

$\lim_{x \to -\infty} (x - \sqrt{x^2+7}) = -\infty$

Ex 11 :

1) $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ car $f(X) = X+3$

$= g(x) + 3$

$= x^2 - 1 + 3$

$= x^2 + 2$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ car $g(X) = X^2 - 1$

$= (f(x))^2 - 1$

$= (x+3)^2 - 1$

$= x^2 + 6x + 8$

2) $h(x) = f(g(x))$

avec $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad g(x) = x^4 + 2x^2 + 1$

Ex 12 :

$\lim\limits_{x \to 0+\infty} \left(\frac{1}{x^2+1}\right) = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = -\infty$

PETIT O

$f \underset{x \to 0}{=} o(g) \iff \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Ex 13 :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 1}{x^3}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2(1 - 3/x + 1/x^2)}{x^3}\right)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{1}{x}\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\right]$

$= 0$

donc $f \underset{+\infty}{=} o(g)$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 0$

donc $\sqrt{x} \underset{+\infty}{=} o(x)$

$\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x}{\sqrt{x}}\right) = \lim\limits_{x \to 0} (\sqrt{x}) = 0$

donc $x \underset{0}{=} o(\sqrt{x})$

EQUIVALENT

$$f \underset{a}{\sim} g \iff \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Ex 14

1) $\lim\limits_{x \to 0^+ \infty} \left(\dfrac{x^3 - 5x^2 + \frac{1}{x}}{x^3} \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^4} \right) = 1$

donc $x^3 - 5x^2 + \frac{1}{x} \underset{+\infty}{\sim} x^3$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^3 - 5x^2 + 1/x}{1/x} \right) = \lim\limits_{x \to 0} \left(x^4 - 5x^3 + 1 \right) = 1$

donc $x^3 - 5x^2 + 1/x \underset{0}{\sim} 1/x$

3) $\lim\limits_{x \to 0} (e^x) = 1$ $\quad e^x \underset{0}{\sim} 1$

Ex 15

1) $\dfrac{x^3 - 3x^2 + 12}{3x^3 + x^2 + x + 1} = \dfrac{x^3 \left(1 - 3/x + 12/x^3 \right)}{x^3 \left(3 + 1/x + 1/x^3 \right)}$ $\xrightarrow[x \to +\infty]{} 1/3$ $\quad \xrightarrow[x \to -\infty]{} 1/3$

$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^3}{3x^3}$ $\quad f(x) \underset{+\infty}{\sim} 1/3$

$f(x) \underset{-\infty}{\sim} 1/3$

2) $\sqrt{x} - 2 \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{x}$

$\dfrac{x^2 - 3x + 1}{3x^3 + 1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{3x^3}$ $\quad$ donc $\quad f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{x} \cdot x^2}{3x^3}$

$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{x}}{x}$

$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Ex 16 :

- $\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-4}} = \dfrac{\sqrt{x(1+3/x)}}{\sqrt{x(1-4/x)}} = \dfrac{\sqrt{x}\sqrt{1+3/x}}{\sqrt{x}\sqrt{1-4/x}} = \dfrac{\sqrt{1+3/x}}{\sqrt{1-4/x}}$

car si $a \geq 0$ $b \geq 0$
$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x+7}) = ?$ F.I " $+\infty - \infty$ "

$$\frac{(\sqrt{x+3} - \sqrt{x+7}) \cdot (\sqrt{x+3} + \sqrt{x+7})}{(\sqrt{x+3} + \sqrt{x+7})} = \frac{(\sqrt{x+3})^2 - (\sqrt{x+7})^2}{(\sqrt{x+3} + \sqrt{x+7})}$$

$|(a-b)(a+b) = a^2 - b^2|$

$$= \frac{x+3-(x+7)}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x+7}}$$

$$= \frac{-4}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x+7}}$$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Ex 17:

$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (0) = 0$

Donc quand on passe à la limite dans une inégalité on perd l'inégalité stricte

Ex 18 :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq \cos x \leq 1$

au voisinage de $+\infty$: $x \to +\infty$ donc $\frac{1}{x}$ est positif

d'où $-\frac{1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x}$ au voisinage de $+\infty$

or $\lim\limits_{x \to +\infty} (-\frac{1}{x}) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{1}{x}) = 0$

d'où par le thm des Gendarmes $\lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{\cos x}{x}) = 0$

Ex 19 :

$|f(x)| = \left| \frac{1 + 3\cos(x) + \sqrt{x}}{x} \right|$

Par l'inégalité triangulaire $|f(x)| \leq \frac{1 + 3|\cos x| + \sqrt{x}}{|x|}$

donc qd $x \to +\infty$ ĉ $\lim \left(\frac{1}{x} + 3\frac{|\cos x|}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x} \right) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Ex 20 :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos x \geq -1$ et $\cos x \leq 1$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad x + \cos x \geq x - 1$ et $x + \cos x \leq x + 1$

or $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-1) = +\infty$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + \cos x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x+1) = -\infty$

donc $\lim\limits_{x \to -\infty} (x + \cos x) = -\infty$

Ex 21 :

Si f est monotone sur I $\Rightarrow$ les limites de f au voisinage de a et b existent

Si f est croissante et MAJORÉE sur I $\Rightarrow$ $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = \underbrace{l}_{\text{limite finie}}$

Si f est croissante et non MAJORÉE sur I $\Rightarrow$ la limite de f en b existe et vaut $+\infty$

Ex 22 :

$$S(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

$S(0) = 1$
mais S n'a pas de limite en 0
donc S n'est pas continue en 0

Ex 23 :

$f : x \longmapsto \ln(\sqrt{x} + 1)$

$x \longmapsto \sqrt{x} + 1$ est continue en 0
et $X \longmapsto \ln X$ ——— en 1
} f est continue en 0 par composée
et $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

Ex 24

$$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} \text{ si } x \neq 0 \end{cases}$$

En 0 : $f(0) = 2$
or $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = +\infty$
} donc f n'est pas continue en 0.

Ex 25 :

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 1 \neq 0\}$
$= \{x \in \mathbb{R} / x \neq -1 \text{ et } x \neq 1\}$
$= \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$? F.I $\frac{0}{0}$ => on FACTORISE par $x - a$ au numérateur et au dénominateur,

$\forall x \in D_f$, $f(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+3}{x+1}$ donc $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \frac{4}{2} = 2$

on prolonge f par continuité en posant $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$