

Ex 8 :

$$f(x) = \ln(1 + e^x)$$

$$\bullet D_f = \{x \in \mathbb{R} / 1 + e^x > 0\}$$
$$= \mathbb{R}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad \text{donc asymptote horizontale}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x(1 + e^{-x}))}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln(1 + e^{-x})}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln(1 + e^{-x})}{x}$$

$$= 1$$

On étudie alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^x) - x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x(1 + e^{-x})) - x$$

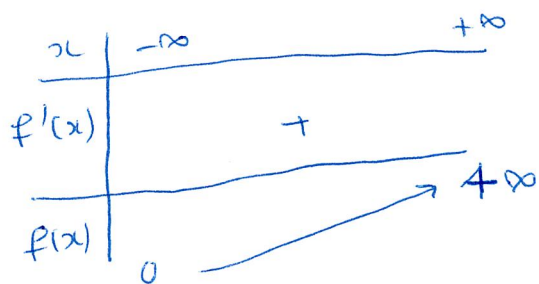
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \ln(1 + e^{-x}) - x$$

$$= 0$$

$\Rightarrow \Delta: y = x$
asymptote oblique en $+\infty$

• f est dérivable sur \mathbb{R} et composée

$$f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$



• Allure de la courbe

Ex 9:

$$[H^+] = 10^{-\text{pH}}$$

$$\Rightarrow \ln[H^+] = -\text{pH} \ln 10$$

$$\Rightarrow \text{pH} = -\frac{\ln[H^+]}{\ln 10}$$

$$\text{pH} = -\log_{10}[H^+]$$

Def 8: $\alpha \in \mathbb{R}$ $f_\alpha(x) = e^{\alpha \ln x} = x^\alpha$

$$D_f =]0, +\infty[$$

Pour les limites

En 0^+

Si $\alpha > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_\alpha(x) = 0$$

Si $\alpha < 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_\alpha(x) = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_\alpha(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^{\alpha-1})$$

~~Si $\alpha < 0$~~
 ~~$\Rightarrow \alpha < 1$~~
 ~~$\Rightarrow \alpha - 1 < 0$~~

donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_\alpha(x)}{x} = +\infty$$

\Rightarrow branche parabolique d'axe (Oy)

En $+\infty$

Si $\alpha > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\alpha(x) = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_\alpha(x)}{x} = \begin{cases} 0 \\ +\infty \end{cases}$$

$0 < \alpha < 1 \Rightarrow$ branche parabolique d'axe (Ox)

$\alpha > 1 \Rightarrow$ branche parabolique d'axe (Oy)

Si $\alpha < 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\alpha(x) = 0$$

\Rightarrow asymptote horizontale d'axe (Ox)

Pour la dérivée

f_x dérivable en tant que composée
et $\forall x \in D_f$

$$f_x'(x) = \alpha \frac{1}{x} e^{\alpha \ln x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$\Rightarrow \forall x \in D_f \quad f_x'(x) > 0 \text{ si } \alpha > 0 \\ f_x'(x) < 0 \text{ si } \alpha < 0$$

Ex 10:

$$f\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = \cos\left(\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right)\right)$$

$$= \cos(\omega t + 2\pi) = \cos(\omega t)$$

$$= f(t)$$

car la fonction
cosinus est
 2π périodique

Ex 11:

$$a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \left[\underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}}_{X} \cos(\omega t) + \underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}}_{Y} \sin(\omega t) \right]$$

$$X^2 + Y^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2$$

$$= \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1$$

donc $\exists! \theta \in]-\pi, \pi[$ /

$$\begin{cases} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin \theta \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \theta / \tan \theta = \frac{a}{b}$$

ainsi

$$\begin{aligned} a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) &= \sin \theta \cos(\omega t) + \sin(\omega t) \cos \theta \\ &= \sin(\theta + \omega t) \\ &= \sin(\omega t + \theta) \end{aligned}$$

$$\text{or } \sin X = \cos\left(\frac{\pi}{2} - X\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega t - \theta\right)$$

$$= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - \omega t\right)$$

$$= \cos\left(\omega t - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) \hat{=} \text{cosinus est paire}$$

$$= \cos\left(\omega t + \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \cos(\omega t + \theta')$$

Le cercle trigo : Remarque constructive

Ex 12

$$f(x) = \tan x - \frac{1}{\tan x}$$

• D_f = $\{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ et } \tan x \neq 0\}$

or $\tan x = \tan 0$

$(\Rightarrow) x = 0 + k\pi$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + k\pi, 0 + k\pi \}$

• Parité

$\forall x \in D_f, -x \in D_f$

et $f(-x) = \tan(-x) - \frac{1}{\tan(-x)}$

$= -\tan x + \frac{1}{\tan x}$

$= -f(x)$

} f impaire

• Periodicité :

$\forall x \in D_f, \pi + x \in D_f$

$f(x + \pi) = \tan(x + \pi) - \frac{1}{\tan(x + \pi)}$

$= f(x)$ car la tangente est π périodique

• Domaine d'étude: 1 domaine de longueur π et \hat{e} impaire

étude sur 1 intervalle de longueur $\frac{\pi}{2}$

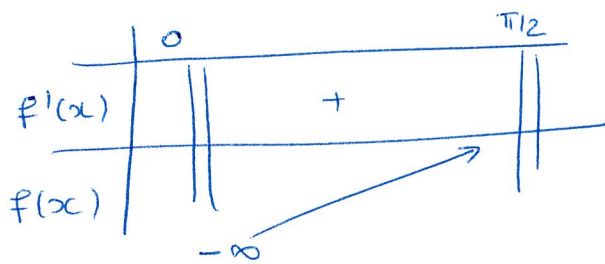
$]0, \frac{\pi}{2}[$

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x - \left(-\frac{(1 + \tan^2 x)}{\tan^2 x} \right)$$

$$= 1 + \tan^2 x + \frac{1}{\tan^2 x} + 1$$

$$= 2 + \tan^2 x + \frac{1}{\tan^2 x}$$

$$\forall x \in]0, \pi/2[\quad f'(x) > 0$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty \quad) \text{ asymptote verticale}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} f(x) = +\infty \quad) \text{ asymptote verticale}$$

Allure de la courbe

• $\forall x \in \mathbb{R} \quad -x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{ch}(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$$

ch est donc PAIRE

$$\operatorname{sh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\operatorname{sh} x$$

sh est donc IMPAIRE

• $\forall x \in \mathbb{R}$ ch et sh sont dérivables et

$$\operatorname{ch}'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh}(x)$$

$$\text{or } \operatorname{sh}(x) \geq 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad e^x \geq e^{-x}$$

$$(\Leftrightarrow) \quad x \geq -x$$

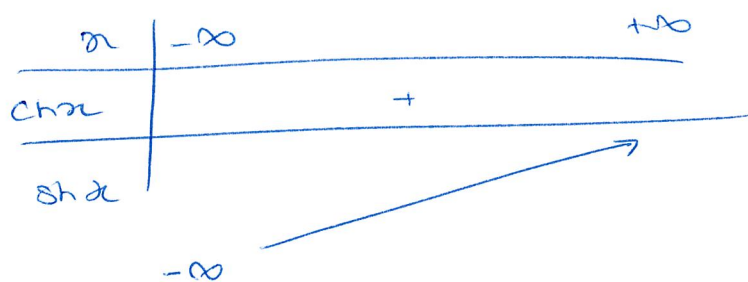
$$(\Leftrightarrow) \quad x \geq 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\operatorname{sh}(x)$	-	0	+
$\operatorname{ch}(x)$			

↘ 1 ↗

$$\text{sh}'(x) = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \text{ch}(x)$$

d'x



Ex 13:

$$\begin{aligned} \text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 \\ &= \underbrace{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2}_{A^2} - B^2 \\ &= (A - B)(A + B) \\ &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \\ &= \left(\frac{e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x}}{2} \right) \left(\frac{2e^x}{2} \right) \\ &= e^{-x} e^x \\ &= 1. \end{aligned}$$