Ex 8 :

$f(x) = \ln(1 + e^{x})$

- $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 1 + e^{x} > 0\}$
  $= \mathbb{R}$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ donc asymptote horizontale

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+e^{x})}{x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(e^{x}(1+e^{-x})\right)}{x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x + \ln(1+e^{-x})}{x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{\ln(1+e^{-x})}{x}$

$= 1$

On etudie alors

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1+e^{x}) - x$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(e^{x}(1+e^{-x})\right) - x$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} x + \ln(1+e^{-x}) - x$

$= 0$

$\Rightarrow$ $\Delta : y = x$
asymptote obliq en $+\infty$

- f est dérivable sur $\mathcal{C}_f$ ĉ composée

$$f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$

x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$

- Allure de la courbe

Ex 9:

$$[H^+] = 10^{-pH}$$

$$\Rightarrow \ln[H^+] = -pH \ln 10$$

$$\Rightarrow pH = -\frac{\ln[H^+]}{\ln 10}$$

$$pH = -\log_{10}[H^+]$$

Def 8: $\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad f_\alpha(x) = e^{\alpha \ln x} = x^\alpha$

$$D_f =]0, +\infty[$$

Pour les limites

En 0^+

Si $\alpha > 0$

$$\lim_{x \to 0^+} f_\alpha(x) = 0$$

Si $\alpha < 0$

$$\lim_{x \to 0^+} f_\alpha(x) = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{f_\alpha(x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \left(x^{\alpha-1}\right)$$

c $\alpha < 0$

$\Rightarrow \alpha < 1$

$\Rightarrow \alpha - 1 < 0$

donc

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f_\alpha(x)}{x} = +\infty$$

$\Rightarrow$ branche parabolique d'axe (Oy)

En $+\infty$

Si $\alpha > 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f_\alpha(x) = +\infty$$

et $$\lim_{x \to +\infty} \frac{f_\alpha(x)}{x} = \begin{cases} 0 \\ +\infty \end{cases}$$

$0 < \alpha < 1 \Rightarrow$ branche parabolique d'axe (Ox)

$\alpha > 1 \Rightarrow$ branche parabolique d'axe (Oy)

Si $\alpha < 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f_\alpha(x) = 0$$

$\Rightarrow$ asymptote horizontale d'axe (Ox)

Pour la dérivée

f_α dérivable en tant que composée

et $\forall x \in D_f$

$$f_\alpha'(x) = \alpha \frac{1}{x} e^{\alpha \ln x} = \alpha x^{\alpha - 1}$$

$$\Rightarrow \forall x \in D_f \quad f_\alpha'(x) > 0 \text{ si } \alpha > 0$$
$$f_\alpha'(x) < 0 \text{ si } \alpha < 0$$

<u>Ex 10 :</u>

$$f\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = \cos\left(\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right)\right)$$

$$= \cos(\omega t + 2\pi) = \cos(\omega t)$$

car la fonction cosinus est 2π periodique

$$= f(t)$$

<u>Ex 11 :</u>

$$a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\left[\underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{= X}\cos(\omega t) + \underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{= Y}\sin(\omega t)\right]$$

$$X^2 + Y^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2$$

$$= \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$$

donc $\exists ! \theta \in]-\pi, \pi]$ /

$$\begin{cases} \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin \theta \\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \theta / \tan \theta = \frac{a}{b}$$

ainsi

$$a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) = \sin \theta \cos(\omega t) + \sin(\omega t) \cos \theta$$

$$= \sin(\theta + \omega t)$$

$$= \sin(\omega t + \theta)$$

or $\sin X = \cos\left(\frac{\pi}{2} - X\right)$

$$= \cos\left(\pi/2 - \omega t - \theta\right)$$

$$= \cos\left(\left(\pi/2 - \theta\right) - \omega t\right)$$

$$= \cos\left(\omega t - \left(\pi/2 - \theta\right)\right)$$ c cosinus est paire

$$= \cos\left(\omega t + \left(\theta - \pi/2\right)\right)$$

$$= \cos\left(\omega t + \theta'\right)$$

Le cercle trigo : Remarque construct

Ex 12

$$f(x) = \tan x - \frac{1}{\tan x}$$

• **Df** $= \{x \in \mathbb{R} / \ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ et } \tan x \neq 0\}$

or $\tan x = \tan 0$

$\Leftrightarrow x = 0 + k\pi$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, \ 0 + k\pi\}$

• Parité

$\forall x \in D_f, \ -x \in D_f$

et $f(-x) = \tan(-x) - \dfrac{1}{\tan(-x)}$

$= -\tan x + \dfrac{1}{\tan x}$

$= -f(x)$

f impaire

• Periodicité :

$\forall x \in D_f, \quad \pi + x \in D_f$

$f(x+\pi) = \tan(x+\pi) - \dfrac{1}{\tan(x+\pi)}$

$= f(x)$ car la tanjente est π periodiq

• Domaine d'etude: 1 domaine de longuer π
et ê impaire

étude sur 1 intervalle de longuer $\pi/2$

$]0, \frac{\pi}{2}[$

$$f'(x) = 1+\tan^2 x - \left(-\frac{(1+\tan^2 x)}{\tan^2 x} \right)$$

$$= 1 + \tan^2 x + \frac{1}{\tan^2 x} + 1$$

$$= 2 + \tan^2 x + \frac{1}{\tan^2 x}$$

$\forall x \in]0, \pi/2[\qquad f'(x) > 0$

	0		$\pi/2$
$f'(x)$	‖	$+$	‖
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	‖

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$) asymptote verticale

$\lim\limits_{\substack{x \to \pi/2 \\ <}} f(x) = +\infty$) asymptote verticale

<u>Allure de la courbe</u>

• $\forall x \in \mathbb{R} \quad -x \in \mathbb{R}$

$$ch(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = ch\, x$$

$\boxed{\text{ch est donc PAIRE}}$

$$sh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -sh\, x$$

$\boxed{\text{sh est donc IMPAIRE}}$

• $\forall x \in \mathbb{R}$ ch et sh sont derivables et

$$ch'(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = sh(x)$$

or $\quad sh(x) \geq 0 \iff e^{x} \geq e^{-x}$

$\iff x \geq -x$

$\iff x \geq 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$sh(x)$		$-$	0	$+$	
$ch(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

$$sh'(x) = \frac{e^{x} - (-e^{-x})}{2} = ch(x)$$

d'où

x	$-\infty$	$+\infty$
$ch\,x$	$+$	
$sh\,x$	$-\infty$	

<u>Ex 13</u> :

$$ch^2 x - sh^2 x = \underbrace{\left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)^2}_{A^2} - \underbrace{\left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)^2}_{B^2}$$

$$= (A - B)(A + B)$$

$$= \left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2} - \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)$$

$$\left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2} + \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{e^{x} + e^{-x} - e^{+x} + e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{2e^{x}}{2}\right)$$

$$= e^{-x} e^{x}$$

$$= 1.$$