

RAISONNEMENTS ET CALCULS

- Connaitre les ensembles de nombres
 - Maîtriser les quantificateurs et les types de raisonnements
 - Savoir résoudre une équation, une inéquation
 - Savoir résoudre un système linéaire de deux équations à deux inconnues
-

1 Les ensembles

1.1 Les sous-ensembles de $\mathbb{R}$

Exemple 1. Qu'est ce qu'un nombre ?

Définition 1.

On distingue plusieurs sous-ensembles de l'ensemble des réels.

- L'ensemble des entiers naturels, noté $\mathbb{N}$.
- L'ensemble des entiers relatifs, noté $\mathbb{Z}$.
- L'ensemble des nombres décimaux (Nombre fini de chiffre après la virgule dans l'écriture décimale), $\mathbb{D}$.
- L'ensemble des nombres rationnels (Quotient de deux entiers relatifs), noté $\mathbb{Q}$. La partie décimale d'un nombre rationnel est périodique à partir d'un certain rang.
- L'ensemble des irrationnels (Les réels non rationnels).

En terme de notations il faudra bien distinguer le symbole $\in$ qui est associé à un élément qui appartient à un ensemble : $1 \in \mathbb{N}$ et la notation d'inclusion $\subset$ qui concerne les ensembles : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

1.2 Les nombres complexes

Définition 2. Un nombre complexe est de la forme $a+ib$ avec a, b des réels et i tel que $i^2 = -1$. Cette écriture est appelée forme algébrique du nombre complexe, a est appelée la partie réelle et b la partie imaginaire. On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Exemple 2. Donner la partie réelle et la partie imaginaire des complexes $z_1 = 3 + 2i$ et $z_2 = 1 - 2i$.

Définition 3. Le nombre complexe $a - ib$ est appelé conjugué du complexe z et noté $\bar{z}$

Exemple 3. Déterminer le conjugué de $z = 1 - i$.

Proposition 1. Soient $z_1 = a+ib$ et $z_2 = c+id$ alors l'addition, la multiplication et le quotient sont définis comme suite

$$\begin{aligned}z_1 + z_2 &= (a + c) + i(b + d) \\z_1 * z_2 &= (ac - bd) + i(ad + bc) \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{(a + ib)(c - id)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.\end{aligned}$$

Exemple 4. Calculer $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ pour les complexes de l'exemple précédent.

Exemple 5. Soit $z = -1 + i$, calculer z^2 et montrer que $z^2 + 2z + 2 = 0$.

2 Notations mathématiques : implication, équivalence, quantificateurs

2.1 Proposition, ET, OU

Définition 4.

- Une proposition (ou assertion) est un énoncé mathématique qui a une et une seule valeur : vrai ou faux.
- La négation de la proposition P est la proposition qui est vraie si et seulement si P est fausse. Elle est notée $\text{non}(P)$.
- Si P et Q sont deux propositions, $P \text{ et } Q$ est la proposition qui est vraie si et seulement si P et Q sont toutes les deux vraies.
- Si P et Q sont deux propositions, $P \text{ ou } Q$ est la proposition qui est vraie si et seulement si au moins une des deux propositions P ou Q est vraie.
- Les opérateurs non, et, ou, sont reliés par les formules suivantes :

$$\text{non}(P \text{ et } Q) = (\text{non}P) \text{ ou } (\text{non}Q).$$

$$\text{non}(P \text{ ou } Q) = (\text{non}P) \text{ et } (\text{non}Q).$$

Exemple 6. Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

1. 136 est un multiple de 17 et 2 divise 167.
2. 136 est un multiple de 17 ou 2 divise 167.

2.2 Implication et équivalence.

Si P et Q sont deux propositions, l'implication $P \implies Q$ est la proposition $\text{non}(P) \text{ ou } Q$. Pour démontrer $P \implies Q$, on suppose que P est vraie et on démontre que Q est vraie.

Remarque 1. En mathématiques si P est fausse alors $P \implies Q$ est vraie.

Lorsque $P \implies Q$ on dit que P est une **condition suffisante** à Q et que Q est une **condition nécessaire** à P .

Exemple 7.

1. Trouver une condition suffisante mais pas nécessaire pour la proposition $A : "x^2 = 9"$, et pour $B : "x > 1"$.
2. Trouver une condition nécessaire mais pas suffisante pour la proposition $A : "x^2 = 9"$, et pour $B : "x > 1"$.

On dit que les propositions P et Q sont **équivalentes** si $P \implies Q$ et $Q \implies P$ et dans ce cas, on note $P \iff Q$.

Exemple 8. Résoudre l'équation $(E) : x = \sqrt{2 - x}$.

2.3 Quantificateurs.

2.3.1 Quantificateur universel " $\forall$ ".

" $\forall x \in E$ " signifie : "**pour tout** élément x de E ".

Exemple 9.

Écrire avec des symboles mathématiques : " le carré d'un nombre réel est toujours positif".

2.3.2 Quantificateur existentiel : " $\exists$ " et " $\exists!$ ".

- " $\exists x \in E$ " signifie : "**il existe** au moins un élément x de E " satisfaisant la suite de la proposition.
- " $/$ ", " $:$ ", " $,$ ", " $|$ " ou espace signifient : " tel que".
- " $\exists!$ ", signifie il existe un **unique**....

Exemple 10.

Écrire uniquement avec des symboles mathématiques :

" L'équation $2x^2 - x = 0$ admet une solution entière."

" 1 admet un unique antécédent par la fonction $\ln$."

2.3.3 Négation des quantificateurs

Théorème 2.

1. $\text{non } (\forall x \in E \quad P(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in E / \text{non } P(x))$
2. $\text{non } (\exists x \in E / P(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in E \quad \text{non } P(x))$

Exemple 11.

Écrire la négation des propositions suivantes :

$P : \exists x \in \mathbb{R} : f(x) = 3.$

$Q : \forall y \in \mathbb{R} \quad f(y)$ est un entier

$R : \forall y \in F \quad \exists x \in E / f(x) = y$

$S : \exists \alpha > 0 ; x \in] - \alpha, \alpha[\implies f(x) \in \left] - \frac{1}{10}, \frac{1}{10} \right[.$

3 Les principes de raisonnements en mathématiques

3.1 Le raisonnement par récurrence

- On vérifie la que la propriété est vraie pour $n = n_0$: c'est l'initialisation
- On suppose que la propriété est vraie à l'ordre n pour un certain entier $n \geq n_0$ ce sera notre hypothèse de récurrence et on démontre à l'aide de l'hypothèse de récurrence que la propriété est vraie à l'ordre $n + 1$: c'est l'hérédité
- On peut alors conclure que la propriété est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Exemple 12. Démontrer que pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

3.2 Le raisonnement par l'absurde

Supposons que dans un certain contexte nous voulions prouver une proposition P . Le raisonnement par l'absurde consiste à supposer que P est fausse puis à mener une preuve qui fournit une contradiction, c'est-à-dire une proposition Q telle que Q soit vraie et "Non Q " aussi (souvent Q est P mais pas toujours). L'axiome du tiers exclu conduit alors à rejeter " P est fausse" donc à constater que P est vraie.

Exemple 13. Démontrer que 0 n'a pas d'inverse.

3.3 Le raisonnement par contraposée

P et Q étant deux propositions, démontrer $P \implies Q$ est équivalent à démontrer l'implication dite contraposée $\text{non}(Q) \implies \text{non}(P)$

Exemple 14. Soit m un entier naturel. Démontrer que si m^2 est pair alors m est pair.

4 Simplifications

4.1 Les identités remarquables

Définition 5. Les factorielles

La factorielle d'un entier naturel n notée $n!$ est définie comme suit :

$$0! = 1 \quad \text{par convention,}$$

$$n! = 1 * 2 * 3 * \dots * n = \prod_{k=1}^n k \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Si $n \in \mathbb{Z}$ et $n < 0$, alors $n! = 0$.

Exemple 15. Calculer $2!$, $3!$, $4!$.

Proposition 3. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$n! = (n-1)! * n$$

.

Exemple 16. Simplifier les expressions suivantes $\frac{n!}{(n-1)!}$; $\frac{(n-1)!}{(n+1)!}$

Définition 6. Les coefficients binomiaux

Pour k et n deux entiers tels que $0 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Si $k < 0$ ou $k > n$, $\binom{n}{k} = 0$.

Exemple 17. Calculer $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}$

Proposition 4. Pour tout couple (k, n) , on a la relation suivante :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Cela permet de construire le **Triangle de Pascal**.

Exemple 18. Trouver $\binom{5}{k}$ pour $0 \leq k \leq 5$.

Proposition 5. Soient a et b deux réels

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Exemple 19.

Développer $(2x-1)^3$.

Factoriser l'expression : $x^2 - 9 + (2x-3)(x-3)$.

4.2 Les fractions

Proposition 6.

- addition : $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$
- multiplication : $\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
- division : $\frac{a}{b} / \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$

Exemple 20. Simplifier au maximum $\frac{\frac{11}{4} - \frac{1}{2}}{\frac{7}{3} + \frac{5}{6}}$

4.3 Les puissances

Proposition 7. $n \in \mathbb{N} \quad p \in \mathbb{N}$

$$a^n * a^p = a^{n+p}$$

$$(a^n)^p = a^{np}$$

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

$$a^0 = 1 \quad a^1 = a$$

$$a^n * b^n = (ab)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$\forall a \geq 0 \quad \sqrt{a} = a^{1/2}$$

Exemple 21. Après avoir donné leur ensemble de définition, simplifier les expressions suivantes :

$$\frac{\sqrt{x}}{x}; \quad \frac{x}{\sqrt{-x}}; \quad (x+1) \cdot \left(\frac{1}{x+1}\right)^{-3}.$$

5 Résolution d'équations et inéquations.

5.1 Équations Polynômiales.

Généralités.

Définition 7. Une **fonction polynômiale** (ou par abus, un **polynôme**) est une quantité de la forme $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ avec n un entier, et les a_k des coefficients réels. Le **degré** d'un polynôme est l'indice du coefficient non nul devant la plus grande puissance x^k . Une équation polynômiale est une équation de la forme $P(x) = c$ avec P une fonction polynômiale et c un réel.

Exemple 22. $P(x) = -x^4 + 3x - 2$ est un polynôme de degré 4; $Q(x) = 2x + 3x^2$ est un polynôme de degré 2. $(E) : x^2 - 3x = 4$ est une équation polynomiale de degré 2.

Définition 8. Soit P un polynôme. On dit qu'un nombre α est **racine** de P si $P(\alpha) = 0$.

Proposition 8. Soit P un polynôme de degré $n \geq 1$. Pour tout nombre α , $P(\alpha) = 0 \iff P(x) = (x - \alpha)Q(x)$ avec Q un autre polynôme (de degré $n - 1$). En particulier P a au plus n racines distinctes.

Cette proposition est très utile : si l'on connaît la factorisation d'un polynôme, on en déduit ses racines et inversement, si on veut factoriser un polynôme il suffit de trouver ses racines.

Exemple 23. Résoudre $(x - 3)(x^2 + x) = 0$, puis résoudre $(x - 3)(x^2 + x) \geq 0$.

On voit sur l'exemple que pour résoudre une inégalité impliquant un polynôme, on transforme le problème en un problème d'étude de signe d'un polynôme, que l'on résout en trouvant ses racines.

Le cas du degré 1

Définition 9. On appelle polynôme de degré 1 toute fonction f qui à x associe $ax + b$ avec $a \neq 0$.

On appelle équation de degré un une équation de la forme $f(x) = 0$.

Proposition 9. L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $-\frac{b}{a}$ et f est du signe de $-a$ sur $] -\infty, -\frac{b}{a}]$ et est du signe de a sur $[-\frac{b}{a}, +\infty[$.

Exemple 24. résoudre $3x - 1 \leq 0$.

Le cas du degré 2.

Définition 10.

On appelle trinôme du second degré toute fonction f qui à x associe $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. On appelle discriminant de l'équation $\Delta = b^2 - 4ac$.

Définition 11. Forme canonique d'un trinôme

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = a \left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] = a \left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$$

Exemple 25. Donner la forme canonique de $x^2 - 2x + 3$.

Proposition 10.

Pour résoudre l'équation $f(x) = 0$ et factoriser le trinôme du second degré, nous obtenons les trois suivants :

- si $\Delta > 0$, f admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

d'où la factorisation de f :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Nous en déduisons que f est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de $-a$ à l'intérieur des racines.

- si $\Delta = 0$ il y a une racine dite double

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

d'où la factorisation de f

$$f(x) = a(x - x_0)^2$$

donc f est du signe de a .

- si $\Delta < 0$, f n'admet pas de racines réelles, f est du signe de a sur $\mathbb{R}$. Mais f admet deux racines complexes conjuguées :

$$x_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

Proposition 11. Somme et produit des racines

Dans la cas où $\Delta > 0$, $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ alors

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} \quad x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

Remarque 2. Vous ne passerez pas par le calcul explicite de Δ dans la cas où c'est une identité remarquable du type $a^2 - b^2$ ou du type $a^2 + 2ab + b^2$ ou lorsque l'une des racines est évidente.

Exemple 26. Résoudre dans $\mathbb{R}$

1. $x^2 - 4 = 0$
2. $x^2 - 5x = 0$
3. $x^2 + 1 = 0$
4. $x^2 - 2x + 5 = 2$
5. $x^2 + x + 1 \geq 0$
6. $x^2 - 4x - 77 \geq 0$
7. trouver le couple de réels (x, y) tels que $x + y = 8 \quad xy = 12$.

Équations et inéquations de degré supérieur

Pour résoudre une équation du type $P(x) = 0$ avec P un polynôme de degré strictement supérieur à deux on cherchera une racine évidente de P à savoir un réel a tel que $P(a) = 0$ puis on factorisera P par $x - a$ en utilisant l'algorithme de la division euclidienne.

Théorème 12. Si P et Q sont deux polynômes alors il existe un unique couple (Q, R) tel que $A = BQ + R$ $\deg(R) < \deg(Q)$. Q est appelé le quotient, R le reste.

Exemple 27. Résoudre

1. $x^3 - 8 = 0$
2. $-4x^3 + 16x^2 - 4x - 24 = 0$
3. $x^3 - 2x^2 + x \leq 0$.

Équations rationnelles

Définition 12. Soient P et Q deux fonctions polynômiales. On dit alors que $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ est une fonction rationnelle (ou une **fraction rationnelle** par abus). Pour résoudre une équation ou une inéquation avec des fractions rationnelles, on essaie de simplifier les fractions si possible puis on transforme le problème en un problème sur des polynômes.

Attention, une fraction n'a de sens qu'en dehors des racines de son dénominateur.

Exemple 28. 1. Résoudre $\frac{x^2 - x + 1}{x + 1} = 3$.
 2. Simplifier $\frac{x^2 - 2x + 1}{x - x^2}$ et résoudre $\frac{x^2 - 2x + 1}{x - x^2} \leq 3$.

5.2 Les systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues

Définition 13. Un système linéaire de deux équations à deux inconnues est un système de la forme

$$(S) \begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

avec a, b, c, d des réels. Résoudre un tel système c'est trouver l'ensemble des couples (x, y) satisfaisant les deux équations du système.

Pour résoudre un tel système nous allons le transformer en un système équivalent par des **combinaisons linéaires** (du type $L_i \leftarrow L_i + aL_j$ pour un coefficient a bien choisi) jusqu'à pouvoir conclure.

Exemple 29. Résoudre

$$(S) \begin{cases} 2x + y = 3 \\ -4x + 5y = 1 \end{cases}$$

.

5.3 Équations et Inéquations avec les valeurs absolues

Définition 14.

Soit x un réel. La valeur absolue de x est notée $|x|$, et l'on a :
 $|x| = x$ si x est positif, $|x| = -x$ sinon.

Exemple 30.

Écrire sans valeur absolue $\left| \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 3} \right|$.

Propriété 1.

- $|xy| = |x| * |y|$
- $|-x| = |x|$
- Inégalités triangulaires : $||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$
- $\sqrt{x^2} = |x|$

Exemple 31.

Donner des exemples où les inégalités sont strictes, et où l'on a l'égalité dans les inégalités triangulaires.

La valeur absolue est souvent utilisée pour caractériser les réels appartenant à un intervalle, grâce à la propriété suivante :

Propriété 2.

Soit x, a deux réels et ε un réel strictement positif.

- $|x - a| = \text{distance}(a; x)$
- $|x - a| \leq \varepsilon \iff x \in [a - \varepsilon; a + \varepsilon]$
- $|X| \leq \varepsilon \iff X \in [-\varepsilon; \varepsilon]$
- $|X| \geq \varepsilon \iff X \in]-\infty; -\varepsilon] \cup [+ \varepsilon; +\infty[$

Exemple 32. Résoudre

1. $|x - 1| = -1$
2. $|2x + 3| \geq 4$

6 Exercices

6.1 TD1

Exercice 1. Calculer $z_1 + z_2, z_1 z_2, \frac{z_1}{z_2}$ pour les complexes $z_1 = 2 + i$ et $z_2 = 1 + 2i$.

Exercice 2.

Soit la proposition $P : x \geq 1$.

Q1 : $x^2 \geq 1$.

Q2 : $x^2 < 0$.

Q3 : $x - 2 = 0$.

Q4 : $x \leq 2$.

Q5 : $\exists y \geq 0 ; x = e^y$.

Q6 : $x \in [2, 3]$.

Dire si chacune des propositions est pour P une condition nécessaire non suffisante, une condition suffisante non nécessaire, une condition nécessaire et suffisante, ou ni l'un ni l'autre.

Exercice 3.

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses

1. $\exists x \in \mathbb{R}, (x + 1 = 0 \text{ et } x + 2 = 0)$
2. $(\exists x \in \mathbb{R}, x + 1 = 0) \text{ et } (\exists x \in \mathbb{R}, x + 2 = 0)$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, (x + 1 \neq 0 \text{ ou } x + 2 \neq 0)$
4. $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in \mathbb{R}, -\varepsilon \leq a \leq \varepsilon$
5. $\exists a \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, -\varepsilon \leq a \leq \varepsilon$

Exercice 4.

Soit f une fonction de la variable réelle, nier les assertions suivantes

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.
2. $\forall M > 0 \quad \exists A > 0, \forall x \geq A, f(x) > M$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, (f(x) > 0 \implies x \leq 0)$.
4. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 ; a \leq b \implies f(a) \leq f(b)$.

6.2 TD2

Exercice 5. Soit $q \neq 1$ et $n \geq 1$. Démontrer que

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Exercice 6. Démontrer par l'absurde l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

Exercice 7. Démontrer les propositions suivantes par la contraposée :

1. "Si x est un réel tel que $x^2 < 1$ alors $x > -1$ "
2. soit a un réel montrer que : $\forall \varepsilon > 0, -\varepsilon \leq a \leq \varepsilon \implies a = 0$

Exercice 8.

Développer les expressions suivantes :

1. $(x-1)(x+2) - x(x-1)$
2. $(-3x-1)^2$
3. $(x-2)^3$
4. $(2x-1)^4$

Exercice 9.

Factoriser les expressions suivantes :

- | | |
|---------------------------------|-------------------------|
| 1. $2x^3 - 5x^2$ | 5. $3a^2b + ab - 4ab^2$ |
| 2. $x^2 - 1 + (3x-2)(x+1)$ | 6. $x^n + nx^{2n}$ |
| 3. $(x-1)(3x+2) + (5x-3)(-x+1)$ | 7. $2^n + 8^n$ |
| 4. $2np - px + p$ | |

Exercice 10.

Déterminer les réels x tels que $x = \sqrt{2x+3}$

6.3 TD3 et début du TD4

Exercice 11. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $x^2 + 4x + 15 = 0$
2. $x^2 + 4x + 4 = 0$
3. $-2x^2 + 3x + 5 = 0$
4. $\frac{1}{6x} = \frac{1}{x^2 + 9}$
5. $\frac{x}{x^2 - 4} = \frac{1}{x + 2}$
6. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4} \leq 1$
7. sans calculs $x^2 - (\sqrt{2} + \pi)x + \pi\sqrt{2} = 0$
8. $(3x+4)^2 < (x-3)^2$
9. $x^3 - 25x \geq 0$
10. $(x+1)^2 > (x+1)(1-2x)$
11. $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 \geq 0$
12. $1 - 8x^3 = (2-4x)(x+2)$
13. trouver le couple de réels (x, y) tels que $x + y = -4$ et $xy = 3$.

Exercice 12. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $x^2 + 4x + 5 = 0$.
2. $x^3 + 4x = 0$.
3. $x^2 + 4x - 3 = 0$.

6.4 Fin TD4 et TD5

Exercice 13.

Déterminer les réels x tels que :

- | | |
|----------------------|--------------------------------------|
| 1. $ x - 2 < 3$ | 6. $ x - 2 < 5$ et $ x - 3 \leq 4$ |
| 2. $ x + 4 < -1$ | 7. $ x + 1 < 1$ ou $ x + 2 \leq 4$ |
| 3. $ x + 5 \leq 3$ | 8. $ x - 5 < 2$ et $ x + 1 \leq 1$ |
| 4. $ x + 2 \geq 5$ | 9. $ x - 2 < 4$ ou $ x + 2 \leq 2$ |
| 5. $ x + 5 \geq -1$ | |

Exercice 14.

Déterminer les points $M(x; y)$ du plan tels que :

1. $|x + y| = 2$
2. $|x + y| \leq 2$
3. $|x| + |y| \leq 3$

Exercice 15.

Résoudre les systèmes ci dessous

$$(S1) \begin{cases} x + y = 7 \\ -5x + 3y = 2 \end{cases}$$

.

$$(S2) \begin{cases} 2x - 5y = 3 \\ -4x + 10y = -6 \end{cases}$$

.

$$(S3) \begin{cases} 3x - 4y = 6 \\ -2x + 7y = 1 \end{cases}$$

.