LES COMPLEXES

Objectifs

- **Connaître les différentes formes d'un nombre complexe.**
- **Savoir résoudre une équation complexe.**
- **Savoir linéariser un sinus ou un cosinus.**

Définition 1.
On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres dits complexes. Sa construction[1] est assez technique. Pour simplifier, disons qu'un nombre purement imaginaire a été inventé par les mathématiciens ; ce nombre purement imaginaire noté i est tel que :

$$i^2 = -1$$

Cette lettre i a été choisie car c'est la première lettre du mot imaginaire.
En électricité, les nombres complexes sont très utiles, mais la lettre i est utilisée pour noter l'intensité, on note donc le i mathématique par un j.

Il existe plusieurs formes pour écrire un nombre complexe z. Selon le contexte, une est plus appropriée qu'une autre.

1 Forme algébrique

1.1 Définitions et propriétés

C'est la forme "classique" des nombres complexes.

Définition 2.
On a pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$:

$$z = a + ib \ , \ (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

a est appelé partie réelle de z et on note : $a = \mathrm{Re}(z)$
b est appelé partie imaginaire de z et on note : $b = \mathrm{Im}(z)$

Exemple 1.
Donner la partie réelle et imaginaire de $z = 2 - 3i$.

Remarque 1.
Il n'y a pas de i dans la partie imaginaire.

1. On peut retrouver cette construction complète dans les livres de mathématiques pour classe préparatoire d'il y a quelques années

Les propriétés d'addition et de multiplication sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$ avec la particularité que $i^2 = -1$.

Exemple 2. Mettre sous forme algébrique $(2+3i)(3-5i)$

Définition 3. (Affixe et image)
A chaque nombre complexe z, on peut associer un point M dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, dont les coordonnées sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de z. On dit alors que M est **l'image** de z et que z est **l'affixe** du point M.

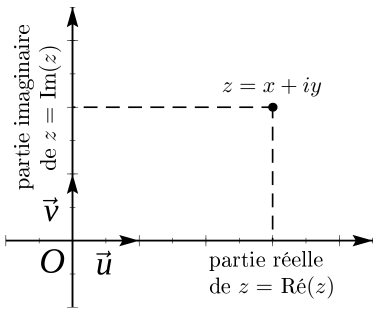


FIGURE 1 – Représentation graphique d'un complexe

Exemple 3.
Représenter le point d'affixe $2 - 3i$

Propriété 1.
Deux nombre complexes z et z' sont égaux si et seulement si $\text{Re}(z) = \text{Re}(z')$ et $\text{Im}(z) = \text{Im}(z')$.

Exemple 4.
Résoudre l'équation : $(x+2i)(1+3i) = 2i(1+xi)$ où x est un réel.

1.2 Nombre conjugué

Définition 4.
Soit $z = a + ib$ un nombre complexe alors son conjugué est : $\overline{z} = a - ib$.

Graphiquement, le point M' d'affixe $\overline{z}$ et le point M d'affixe z sont symétriques par rapport l'axe des réels purs.

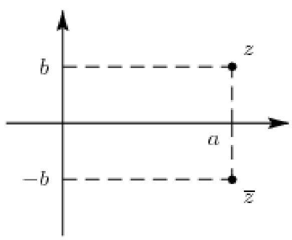


FIGURE 2 – Nombre complexe conjugué

Remarque 2. En Physique, si $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$, l'intensité complexe est notée $\underline{I} = I_0 e^{j\omega t}$ et le conjugué de $\underline{I}$ est noté $\underline{I}^*$.

Exemple 5.
Donner le nombre conjugué de $1 + i(2 + 3i)$.

On pourra simplifier les calculs faisant intervenir des z et $\bar{z}$ à l'aide des deux égalités suivantes :

$$z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z) \text{ et } z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$$

Propriété 2.
$\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$
$\overline{zz'} = \bar{z}\overline{z'}$
$\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\overline{z'}}$

Exemple 6.
En posant $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ puis en calculant séparemment chaque coté de l'égalité, montrer que $\overline{zz'} = \bar{z}\overline{z'}$.

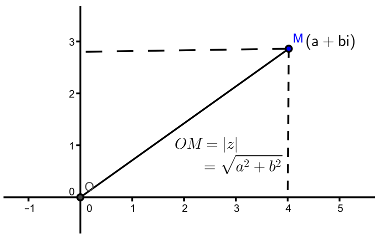
Remarque 3.
La forme algébrique de $\dfrac{z}{z'}$ est obtenue en multipliant le numérateur et le dénominateur par le conjugué de z', c'est à dire $\overline{z'}$.

Exemple 7.
Donner la forme algébrique de $\dfrac{1 + 2i}{3i + 2}$.

1.3 Module

Définition 5.
Le module de $z = a + bi$, avec a et b deux nombres réels est égal à $\sqrt{a^2 + b^2}$, on le note $|a + bi|$.

Soit z l'affixe d'un point M. $|z|$ est la distance OM.



Exemple 8.
Calculer le module de $2 - 5i$.

Propriété 3. Relation entre module et conjugué :
$|z|^2 = z\bar{z}$

Exemple 9.
Déterminer les points M d'affixe z du plan tels que $(\bar{z} + 2 - 3i)(z + 2 + 3i) = 4$ sans utiliser la forme algébrique de z.

Théorème 1.
Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, $|zz'| = |z|.|z'|$, $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ et $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$

Exemple 10.

1. Calculer le module de $\dfrac{1-i}{i+\sqrt{3}}$
2. Sans passer par la forme algébrique des complexes mais en utilisant la forme du module avec le conjugué, démontrer $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

2 Forme trigonométrique et forme exponentielle

2.1 Formulaire de trigonométrie

2.1.1 Angles associés

Propriété 4.

$\cos(-x) = \cos(x)$	$\sin(-x) = -\sin(x)$
$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$	$\sin(\pi - x) = \sin(x)$
$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$	$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$	$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$
$\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin(x)$	$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x)$

2.1.2 Valeurs remarquables

Propriété 5.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(\theta)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	

2.2 Forme trigonométrique

Définition 6.
Pour tout nombre complexe $z = a + bi \in \mathbb{C}$, il existe deux réels ρ et θ tels que :

$$z = \rho\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)$$

ou sous forme condensée :

$$z = [\rho; \theta]$$

Pour trouver la forme trigonométrique à partir de la forme algébrique

- ρ est le module de z et on a : $\rho = |z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$
- θ est appelé un argument de z et θ est noté $arg(z)$ et il est défini par :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{a}{\rho} \\ \sin(\theta) = \dfrac{b}{\rho} \end{cases} \quad \text{L'argument de } z \text{ est déterminé à } 2\pi \text{ près.}$$

Exemple 11.
Déterminer la forme trigonométrique de $1 - i\sqrt{3}$.

Corollaire 2.
Deux nombres complexes, écrits sous leur forme trigonométrique, sont égaux si et seulement si ils ont le même module et si leurs arguments sont égaux à 2π près.

Exemple 12.
Ecrire la propriété précédente à l'aide de symboles mathématiques.

En électricité, lors des applications numériques, il est rare de trouver des arguments exacts comme en mathématiques. On utilise souvent la fonction tangente, et l'on écrit que
$\theta = \tan^{-1} \dfrac{Im\ z}{Re\ z}$ à π près.

Exemple 13.
Déterminer une valeur approchée d'un argument de $-1+2i$.

Théorème 3.
Quelque soit θ et θ' dans $\mathbb{R}^2$ on a :

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))(\cos(\theta') + i\sin(\theta')) = \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')$$

Exemple 14. Démontrer ce théorème.

Corollaire 4.
Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$ et $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$

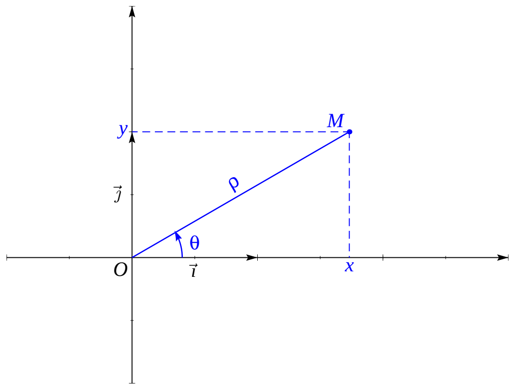
Corollaire 5.
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Cette formule est appelée formule de De Moivre.

2.3 Interprétation géométrique

On a déjà vu que ρ est la distance OM.
θ est l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$



Remarque 4.
L'interprétation géométrique de θ est utile pour trouver rapidement un argument de z.

Exemple 15.
Déterminer, à l'aide d'un graphique, un argument de 1,i, -1 et $-i$.

2.4 Exponentielle complexe

Définition 7.
L'idée de génie de Léonhard Euler a été de définir l'exponentielle complexe en posant : pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Exemple 16.
Donner la forme exponentielle de 1, i, -1 et $-i$.

Cette définition est justifiée par le fait que l'exponentielle complexe vérifie la même propriété fondamentale que l'exponentielle réelle :

Corollaire 6. Pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ on a : $e^{i\theta}.e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$

Corollaire 7.
Pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ on a : $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$; $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$

Corollaire 8.
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$.

Un autre résultat important est :

Théorème 9.
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

Ce théorème sert en particulier à calculer les modules des nombres complexes qui apparaissent sous la forme d'une somme d'exponentielles complexes grâce à la formule : $|z|^2 = z\overline{z}$

Exemple 17.
Soient $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Donner la forme exponentielle de $z_1 z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, z_1^3, $\overline{z_1}$ et $|z_1|$.

2.5 Forme exponentielle des nombres complexes

Définition 8.
Soit z un nombre complexe : posons $r = |z|$ et $\theta = \arg z$. On a donc, en utilisant l'exponentielle complexe :

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = re^{i\theta}$$

L'écriture $z = re^{i\theta}$ s'appelle la forme exponentielle du nombre complexe z.

Exemple 18.
Donner l'écriture exponentielle de : $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

Propriété 6.
Soit $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$. On a :

$$z_1 z_2 = [\rho_1\rho_2; \theta_1 + \theta_2]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left[\frac{\rho_1}{\rho_2}; \theta_1 - \theta_2\right]$$

$$z_1^n = [\rho_1^n; n\theta_1]$$

Propriété 7.
Dite Formules d'Euler.

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Exemple 19.

1. Exprimer $\cos(2x)$ en fonction de l'exponentielle.
2. Exprimer $e^{-3ix} - e^{3ix}$ en fonction de sinus ou cosinus.

2.6 Linéarisation des cosinus et des sinus

Linéariser c'est transformer un produit en somme. En particulier ici c'est transformer un $\cos^n(x)$ ou un $sin^n(x)$ en somme de $\cos(nx)$ et de $\sin(nx)$. Cette technique est très utile pour le chapitre de Calcul Intégral. Pour linéariser des cosinus et des sinus, la méthode est la suivante :

- on écrit le cosinus ou le sinus à l'aide des formules d'Euler.
- On développe à l'aide de la formule du binôme de Newton : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
- On regroupe les exponentielles deux par deux pour faire apparaître les cosinus et sinus à l'aide des formules d'Euler.

Vidéo : *Video sur la linéarisation des cos et sin*

Exemple 20.
Linéariser $\cos^3(x)$.

3 Racines carrées d'un nombre complexe

3.1 Rappel de la définition d'une racine carrée dans $\mathbb{R}$

Pour tout x positif il existe un **unique** nombre **positif** y tel $y^2 = x$. Ce nombre y est appelé **la** racine carrée de x.
Par exemple $(-3)^2 = 9$ et $3^2 = 9$ comme $3 > 0$ alors 3 est **la** racine carrée de 9 et on note $\sqrt{9} = 3$.

3.2 Notion de racine carrée dans $\mathbb{C}$

On vient de voir que dans $\mathbb{R}$, c'est la notion de nombre positif qui permet de définir **le** nombre $\sqrt{\cdot}$.
Mais dans $\mathbb{C}$, on a par exemple : $i^2 = (-i)^2 = -1$, $(1+i)^2 = (-1-i)^2 = 2i$. Nous n'avons plus le critère de positivité pour définir la racine carrée de -1 ou $2i$.
On ne parle donc pas de **la** racine carrée dans $\mathbb{C}$, mais **des** racines carrées, puisque que l'on ne peut pas choisir, par exemple, entre i et $-i$ laquelle des deux serait **la** racine carrée ?

En conclusion, $\sqrt{a}$, avec $a \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ n'a **aucun sens**.

3.3 Avec la forme exponentielle

C'est une technique très élégante mais qui n'est possible qu'à condition que l'argument de l'inconnue complexe z dont on cherche les racines carrées, soit un angle remarquable, c'est dire $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$, ou un de leurs multiples. Sinon, cette méthode n'a pas d'intérêt ! La méthode est la suivante :

- On donne un nombre complexe $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$, et l'on cherche $z = \rho e^{i\theta}$ tel que $z^2 = z_1 \quad (E)$.
- On identifie le module et l'argument des nombres complexes de l'égalité (E). (Corolaire 2)
- On en déduit ρ et θ en fonction de ρ_1 et θ_1.
- On doit trouver deux valeurs.

Vidéo : *Exemple de recherche de racines carrées d'un nombre complexe avec la forme exponentielle*

Exemple 21.
Chercher les racines carrées de

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

.

4 Racine $n^{ième}$ d'un nombre complexe

4.1 Racine $n^{ième}$ de l'unité

Chercher les racines nièmes de l'unité c'est résoudre l'équation $z^n = [\rho^n, n\theta] = 1$. En appliquant la méthode de recherche d'une racine carré sous forme trigonométrique, on trouve n solutions de la forme :
$\rho = 1$ et $\theta = 2k\pi/n$ où $k \in 0, ..., n-1$.

Exemple 22.
Déterminer les racines cubiques de l'unité.

4.2 Racine $n^{ième}$ d'un complexe quelconque

On ne pourra calculer les valeurs exactes des racines $n^{ième}$ d'un nombre quelconque, que si son argument est un angle remarquable. Sinon l'exercice est pratiquement impossible à résoudre. Supposons donc que ce nombre complexe $z = [\rho, \theta]$, où θ est un angle remarquable. Alors, chercher les racines nièmes de z c'est résoudre $Z^n = z$ où $Z = [r, \phi]$. Les solutions sont donc : $Z_k = [\sqrt[n]{\rho}, \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2k\pi}{n}]$ où $k \in 0, ..., n-1$.

Exemple 23.
Chercher les racines 5ème de $z = 1 + i$.

5 Savoir résoudre une équation complexe

5.1 Equation du second degré à coefs réels

On considère une équation à coefficients réels du type

$$ax^2 + bx + c = 0, (a, b, c, z) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}$$

Si le discriminant Δ est négatif alors cette équation admet 2 solutions complexes

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$
$$z_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

Exemple 24. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^2 + x + 1 = 0$

TD

Exercice 1.
Déterminer la forme algébrique des nombres suivants :

1. $(2 + 3i)(5 - i)$; $(-1 + 2i)(3i + 5)$
2. $(1 + 2i)^2$; $(2 - i)^2$
3. $\dfrac{1 + 2i}{1 + 3i}$; $\dfrac{2i}{2 - 3i}$
4. z tel que $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{R} + iC\omega$
5. Donner les conjugués des nombres obtenus en 1) et 2)

Exercice 2.
Écrire en fonction de $\bar{z}$: $\overline{\left(\dfrac{2iz + 3}{(5z + 2i)(z + 1)}\right)}$

Exercice 3.
Déterminer deux nombres complexes z et z' tels que $|z+z'| < |z|+|z'|$, puis deux autres nombres complexes tels que $|z+z'| = |z|+|z'|$

Exercice 4.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\dfrac{2+i}{2+z-i} = \dfrac{2+3i}{5-2i}$

Exercice 5.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\dfrac{3+2iz}{2+3i} = \dfrac{-1+2i}{i+3}$

Exercice 6.
Soit R, C, L et ω trois réels positifs. En électricité on peut obtenir les nombres z définis de la façon suivante :

1. $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{jL\omega} + \dfrac{1}{R}$
2. $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{jL\omega} + jC\omega$

Déterminer la forme algébrique des nombres précédents.

Exercice 7.
Écrire sous forme algébrique les nombres complexes : $e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\pi}, e^{-i\frac{\pi}{3}}, e^{-i\frac{\pi}{4}}, e^{-i\frac{\pi}{2}}, e^{-i\pi}$

Exercice 8.
Écrire sous forme d'exponentielle complexe : $i, -i, 1+i, 1-i, \dfrac{1}{i}, \dfrac{1+i}{1-i}, \sqrt{3}+i, \sqrt{3}-i, -e^{i\theta}$, $\cos\theta - i\sin\theta, \sin\theta - i\cos\theta$

Exercice 9.
Soit R, C, L et ω trois réels positifs. En électricité on peut obtenir les nombres z définis de la façon suivante :

1. $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{jL\omega} + \dfrac{1}{R}$
2. $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{jL\omega} + jC\omega$

Déterminer la forme exponentielle des nombres précédents.

Exercice 10.
calculer $z = \left(1+\sqrt{3}i\right)^{13}$ et $(\sqrt{3}-i)^{(\text{année scolaire en cours})}$

Exercice 11.
soient $z_1 = 1+i$ et $z_2 = 1+i\sqrt{3}$ et $z_3 = z_1 z_2$.

1. Déterminer le module et un argument de z_1, z_2, z_3.
2. En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

Exercice 12.
soient $z_1 = 2\sqrt{6}\,(1+i)$ et $z_2 = \sqrt{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)$

1. Calculer le nombre complexe $\frac{z_1}{z_2}$ sous forme algébrique.
2. Calculer le module et l'argument de $z_1, z_2, \frac{z_1}{z_2}$
3. En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 13.
Soit $z = e^{i\phi} + e^{i\psi}$ avec $\phi, \psi \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $z = e^{i(\frac{\phi+\psi}{2})}(e^{i\frac{\phi-\psi}{2}} + e^{i\frac{\psi-\phi}{2}})$
2. En déduire le $|z|$.

Exercice 14.
Linéariser et donner les primitives :

1. $\cos^5 x$
2. $\cos^2 x \sin^3 x$

Exercice 15. Trouver les racines carrés de $1+i$, $-i$, $\sqrt{3}-i$.

Exercice 16. Trouver les racines cubiques de $2-2i$.

Exercice 17. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^4 = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$

Exercice 18. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on pose $P(z) = z^4 - 1$

1. Factoriser $P(z)$
2. En déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$
3. En déduire les solutions de l'équation $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$

Exercice 19. Trouver les racines quatrième de 81 et -81.

Exercice 20. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^2 + 2x + 5 = 0$

Exercice 21. (facultatif)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

1. Résoudre $z^{2n} + z^n + 1 = 0$.
2. Résoudre $(z-1)^n = (z+1)^n$, montrer que les solutions sont des imaginaires purs.