FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

Dans tout ce chapitre, $\mathcal{A}$ désigne une partie de $\mathbb{R}^2$, c'est à dire un plan privé d'un point, un demi-plan, un disque, un rectangle, une ellipse...

1 Généralités

1.1 Fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$

En mathématiques vous avez vu jusqu'à présent des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. (Une seule variable et l'image est un réel), mais on peut aussi considérer n variables et un p-uplet de réels comme image, on a alors une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

Exemple 1. Déterminer n et p dans les exemples suivants :

1. On considère la trajectoire d'un point M dans l'espace d'équations $\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = 3\sin t \\ z(t) = 2t - 3 \end{cases}$
2. Le champ de vecteurs $\vec{V}(x + 2y; 3y + z; x^2 - xy)$
3. le potentiel scalaire $f(x, y, z) = -2x + 3y + 2z$

Définition 1. Une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ est définie de la façon suivante :

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \longrightarrow (f_1(x_1, x_2, .., x_n), f_2(x_1, x_2, .., x_n), ..., f_p(x_1, x_2, ..., x_n))$$

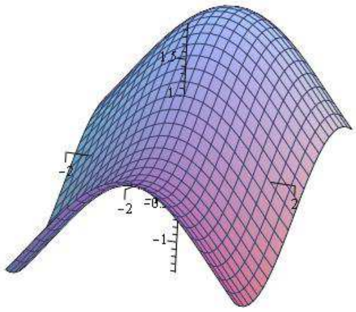
Pour simplifier les notations et la compréhension des différentes notions nous prendrons dans la suite du cours $n = 2$ et $p = 1$. La généralisation se fait aisément pour $n > 2$ en ajoutant des termes ou des coordonnées aux formules que nous verrons.

1.2 Fonctions à deux variables

On note $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions de A dans $\mathbb{R}$. On définit alors une fonction de deux variables par la relation suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & z = f(x, y) \end{array}$$

Par exemple, la relation $PV = nRT$ des gaz parfaits, nous permet d'écrire par exemple T en fonction de P et V. On aura alors $T = f(P, V)$ avec $f(x, y) = \dfrac{xy}{nR}$.
La représentation graphique d'une fonction de deux variables est une surface dans $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = f(x, y)$.



Pour dessiner la surface, le logiciel trace des lignes de niveaux, c'est à dire qu'il trace les lignes C_k où une des deux variables x ou y de $M(x, y, f(x, y))$ est constante et égale à k. Certains logiciels tracent aussi les lignes de niveau $f(x, y) = k$.

Exemple 2. Pour la fonction suivante, tracer les lignes de niveaux C_k dans un plan pour $k \in \{0; 1; 2; 3\}$, et en prenant successivement $x = 0$ et $y = 0$, puis $f(x, y) = k$ et enfin en déduire l'allure de la surface en dimension 3 :
$f(x, y) = x^2 + y^2$

Définition 2. Fonction partielle de $\mathbb{R}^2$
Soit $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$. Soit $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{A}$. On appelle fonctions partielles associées à f en M_0 les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_{y_0} : x \mapsto f(x, y_0)$$
$$f_{x_0} : y \mapsto f(x_0, y)$$

Exemple 3. Soit $f(x, y) = \dfrac{(2 - y)\cos(xy)}{1 + x^2}$.
Déterminer les fonctions partielles de f au point $(0; 1)$.

2 Limites, continuité en un point

2.1 Définitions et propriétés

Soit f définie sur un partie U de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et M_0 un point de $\mathbb{R}^2$. On note $d(A, B)$ la distance entre les points A et B et

$$AB = d(A, B) = ||\vec{AB}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

avec $x = x_b - x_a$ et $y = y_b - y_a$

Définition 3. Limite finie
On dit que $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = l$ si :

pour toute distance non nulle ε (aussi petite soit-elle), il existe toujours un disque ouvert centré en M_0, telle que pour tout point M appartenant au disque et au domaine de définition, l'écart entre $f(M)$ et l est plus petite que ε. Autrement dit on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall M \in U, d(M_0, M) < \alpha \Rightarrow |f(M) - l| \leqslant \varepsilon$$

Exemple 4. Déterminer $\lim\limits_{M \to O} f(M)$ avec $f(M) = f(x, y) = \sin\left(x^2 + y^2\right)$.

Définition 4. Limite égale à plus l'infini
On dit que $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = +\infty$ si et seulement si : pour tout réel A (aussi grand que l'on veut), il existe toujours un disque ouvert centré en M_0, telle que pour tout point M appartenant au disque et au domaine de définition, $f(M)$ est supérieur à A.

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0 / \forall M \in U, d(M_0, M) < \alpha \Rightarrow f(M) \geqslant A$$

Définition 5. Limite égale à moins l'infini
On dit que $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = -\infty$ si et seulement si : pour tout réel A ($A < 0$ et $|A|$ aussi grand que l'on veut), il existe toujours un disque ouvert centré en M_0, telle que pour tout point M appartenant au disque et au domaine de définition, $f(M)$ est inférieur à A.

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0 / \forall M \in U, d(M_0, M) < \alpha \Rightarrow f(M) \leqslant A$$

Exemple 5. Déterminer $\lim\limits_{M \to 0} f(M)$ avec $f(M) = f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$.

Tous les théorèmes vus sur les fonctions d'une variable sont transposables aux fonctions de deux variables. En particulier le théorème des Gendarmes qui dit ici :

Théorème 1. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ et $g : A \to \mathbb{R}$ telles que pour tout (x, y) pris au voisinage de $(x_0, y_0), |f(x, y)| \leqslant g(x, y)$ alors : Si $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} g(x, y) = 0$ alors $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x, y) = 0$

Définition 6. On dit que f est continue en (x_0, y_0) si et seulement si : $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$.

2.2 Calcul pratique d'une limite

Soit M_0 un point appartenant à la frontière du domaine de définition et n'appartenant pas au domaine de définition.

2.2.1 La fonction admet une limite en M_0

Lorsque le calcul d'une limite n'est pas évident, on peut utiliser des majorations.

Exemple 6.
Soit f la fonction définie par $f(x; y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}$.

1. Montrer que $|xy| \leqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.
2. En déduire que $|f(x,y)| \leqslant \frac{|y|}{2}$.
3. Puis la limite de f en $(0,0)$.

Remarque 1. On peut aussi utiliser un passage en coordonnées polaires en posant : $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, et en remarquant que :

$$((x,y) \longrightarrow (0,0) \Longleftrightarrow (r \to 0 \text{ et } \theta \text{ quelconque})$$

Exemple 7. Reprendre l'exemple précédent en passant en coordonnées polaires.

2.2.2 La fonction n'admet pas de limite en M_0

Proposition 2 (Règle des chemins).
Soit u et v deux fonctions continues telles que $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} u(x) = y_0$ et $\lim\limits_{y \longrightarrow y_0} v(y) = x_0$. Si f admet une limite l en (x_0, y_0) alors on a $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x, u(x)) = l$ et $\lim\limits_{y \longrightarrow y_0} f(v(y), y) = l$

Remarque 2. Attention, la réciproque de cette proposition est fausse : si f admet des limites égales sur un ou plusieurs chemins, cela ne signifie pas que f admet une limite.

Par contraposée,

Proposition 3.
Si les limites sur deux chemins différents ne sont pas égales alors on en déduit que f n'a pas de limite en (x_0, y_0).

On utilisera souvent cette propriété pour montrer que f n'admet pas de limite.

Exemple 8. Montrer que la fonction f définie par : $f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ n'admet pas de limite en $(0,0)$.

Remarque 3. On peut aussi utiliser le changement de variables $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ et montrer que $f(x,y)$ dépend de θ lorsque r tend vers 0.

Exemple 9. Reprendre l'exemple précédent avec la méthode précédente.

3 Dérivées partielles

3.1 Définition

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction de U dans $\mathbb{R}$. On dit que f admet des dérivées partielles en $M_0(x_0, y_0)$ si $\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}$ et $\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0, y_0+t) - f(x_0, y_0)}{t}$ sont finies. On note alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0, y_0+t) - f(x_0, y_0)}{t}$$

On observe ainsi, que les dérivées partielles ont pour valeurs les dérivées des applications partielles f_{x_0} et f_{y_0}.

Exemple 10. Calculer les dérivées partielles de $f(x, y) = x^2 y^8 + e^x$.

Exemple 11.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\begin{cases} f(x,y) = & (x^2+y^2)\sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = & 0 \end{cases}$$

Déterminer $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$

3.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Soit f une fonction de U dans $\mathbb{R}$ admettant en tout point de U des dérivées partielles. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si et seulement si les dérivées partielles de f sont continues sur U. On note $\mathcal{C}^1(U)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. C'est un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}(U, \mathbb{R})$.

Exemple 12.
La fonction définie à ?? est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

3.3 Dérivées partielles d'une composée

Propriété 1.
Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(X, Y)$ et ϕ une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que
$\phi(x, y) = (\phi_1(x, y), \phi_2(x, y))$. Soit g la fonction définie par $g(x, y) = f(\phi(x, y))$.
On a alors :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial X}(\phi(x_0, y_0))\frac{\partial \phi_1}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial Y}(\phi(x_0, y_0))\frac{\partial \phi_2}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial X}(\phi(x_0, y_0))\frac{\partial \phi_1}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial Y}(\phi(x_0, y_0))\frac{\partial \phi_2}{\partial y}(x_0, y_0)$$

ce que l'on traduit par abus de notation par :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial Y}\frac{\partial \phi_2}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial Y}\frac{\partial \phi_2}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y}$$

Exemple 13.
Calculer $\frac{\partial f}{\partial y}$ avec $f(x, y) = g(x^2 + 2y, 3xy)$.

On utilisera les changements de variables dans les équations aux dérivées partielles.

3.4 Dérivées partielles d'ordre 2

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Si les fonctions dérivées partielles premières $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U. On note $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ les dérivées partielles secondes de f.

Théorème 4 (de Schwarz). Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U alors on a : $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

4 Différentielle

4.1 Fonction différentiable

Définition 7. Fonction différentiable
S'il existe deux réels m et p, ainsi qu'un disque $\mathcal{D}$ centré en (x_0, y_0) tels que pour tout $(h, k) \in \mathcal{D}$:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + mh + pk + \| (h, k) \| \, \phi(x_0 + h, y_0 + k)$$

avec $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \phi(x_0 + h, y_0 + k) = 0$
alors on dit que :

- la fonction f est **différentiable** en (x_0, y_0) et $m = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $p = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.
- $f(x_0, y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \| (h, k) \| \, \phi(x_0 + h, y_0 + k)$ est le **développement limité de** f **d'ordre 1** en M_0.

Exemple 14. Déterminer le $DL_1((\pi, 1))$ de $f(x, y) = x^3 + y^3 \cos x$.

Remarque 4.
Si f admet des dérivées partielles en (x_0, y_0), alors f n'est pas forcément différentiable en (x_0, y_0).

Exemple 15.
Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

1. Montrer que f admet deux dérivées partielles en $(0,0)$, et calculer ses dérivées partielles.
2. Si f était différentiable en 0, déterminer la fonction ϕ.
3. Calculer $\phi(x,x)$ pour $x > 0$.
4. Conclure

Proposition 5.
Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors f est différentiable, c'est à dire qu'il **suffit** que les dérivées partielles soit continues pour que f soit différentiable.
Cela implique donc que la fonction de l'exemple précédent n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$

Remarque 5.
Il n'est pas nécessaire que f soit de classe C^1 pour que f soit différentiable.

Exemple 16.
Montrer que la fonction de ?? est différentiable mais pas de classe C^1.

Définition 8. Application différentielle
Soit f une application différentiable en (x_0, y_0).
L'application $df(M_0) : (h,k) \mapsto h\dfrac{\partial f}{\partial x}(M_0) + k\dfrac{\partial f}{\partial y}(M_0)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$ c'est à dire une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
On l'appelle différentielle de f en M_0.

4.2 Des maths ... à la physique

Des maths ...
Pour simplifier l'écriture, on note $df(M_0) = df$.
On a donc $df(h,k) = \dfrac{\partial f}{\partial x}h + \dfrac{\partial f}{\partial y}k$
On appelle dx et dy les applications différentielles respectivement des fonctions $(h,k) \mapsto h$ et $(h,k) \mapsto k$.

Exemple 17. Montrer que l'on a $dx(h,k) = h$ et $dy(h,k) = k$.

On peut donc écrire :
$$df(h,k) = \frac{\partial f}{\partial x}dx(h,k) + \frac{\partial f}{\partial y}dy(h,k)$$
soit $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy$ avec dx et dy des applications.

... à la physique

On note $\Delta f(h,k) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0)$. Δf est donc la variation de f autour du point $M(x_0,y_0)$.
On vient de voir, avec la définition de la différentielle, que $\Delta f(h,k) \approx \frac{\partial f}{\partial x}dx(h,k)+\frac{\partial f}{\partial y}dy(h,k)$ pour (h,k) proche de $(0,0)$, et d'autre part, il est d'usage de noter en physique, une petite variation de x par dx et une petite variation de f par df. Donc, en confondant la fonction dx avec son image $dx(h,k)$ et Δf avec df, on obtient l'interprétation physique de la différentielle : $df(h,k) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ C'est une approximation à l'ordre 1 de la variation de f pour d'infinitésimales variations de x et y.

Exemple 18. Soit $S = xy$ la surface d'un rectangle de dimensions x et y.
A l'aide d'un raisonnement physique, déterminer une petite variation de la surface.
A.N. : $x = 10$, $y = 2$, $dx = 0,1$ et $dy = 0,01$.

4.3 Gradient

Définition 9. Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. En tout point M_0, il existe un unique vecteur appelé **gradient** de f en M_0 noté $\mathrm{grad}\, f(M_0)$ ou $\nabla f(M_0)$ dont les coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont : $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(M_0), \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\right)$.

Exemple 19. Soit f définie par $f(x,y) = x^2 + 3xy$. Déterminer son gradient au point de coordonnées (2 ;-3).

Remarque 6. On remarque que : $df(h,k) = \mathrm{grad}\, f \cdot (h,k)$

Proposition 6. Interprétation géométrique du gradient soit f une fonction telle que $f(x_0,y_0) = z_0$ et f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

- le gradient de f en $M_0(x_0,y_0)$ est orthogonal en M_0 à la ligne de niveau d'équation $f(x,y) = z_0$.
- la variation positive de f est maximale dans le sens du gradient

Exemple 20. Soit f la fonction définie par $f(x,y) = x^2 + y^2$.
Illustrer la propriété précédente au point $M_0(1;1;f(1;1))$.

Exemple 21.
La propriété ci-dessus peut-être obtenue à partir de l'idée suivante :

1. Donner la définition de $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
2. On suppose que $||(h,k)||$ est constant et proche de 0.
   (a) Que peut-on dire de l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{M_0M} = (h,k)$?
   (b) Déterminer les vecteurs (h,k) tels que $df(h,k)$ est maximal, puis minimal et nulle.

(c) En déduire une justification de la propriété précédent.

Remarque 7. L'exemple précédent permet une justification géométrique, mais elle repose sur une approximation et n'est donc pas très rigoureuse. On peut obtenir de façon rigoureuse le résultat précédent en utilisant la représentation paramétrique de la ligne de niveau. On verra cela dans un prochain chapitre.

4.4 Plan tangent à une surface

Par analogie avec l'équation d'une tangente pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on définit de même le plan tangent en un point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)$ à la surface d'équation $f(x, y) = z$ par l'équation :

$$z = f(x_0, y_0) + (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Exercices TD

Exercice 1.
Chacune des fonctions suivantes est-elle prolongeable par continuité en (0,0) ?

1. $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x}$
2. $f(x, y) = \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}$
3. $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{|x| + |y|}$
4. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^3 + 3y^2}$
5. $f(x, y) = (x + y^2) \sin\left(\dfrac{1}{xy}\right)$
6. $f(x, y) = \dfrac{1 - \cos(xy)}{y^2}$

Exercice 2.
Soit f la fonction définie par $f(x, y) = \dfrac{x^2 y}{\sqrt{x^4 + y^2}}$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

1. Soit D une droite quelconque passant par l'origine. Montrer que la restriction de f à D est continue en (0,0).
2. Peut-on en déduire que f est continue en (0,0) ? L'est-elle néanmoins ?

Exercice 3. La loi des gaz parfaits peut prendre la forme $PV = nRT$ où n est le nombre de molécules de gaz, V le volume, T la température, P la pression et R une constante. Montrer que : $\dfrac{\partial V}{\partial T}\dfrac{\partial T}{\partial P}\dfrac{\partial P}{\partial V} = -1$

Exercice 4.

Soit f la fonction définie par : $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

1. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer les dérivées partielles de f'_x et f'_y de f. Quelles sont les valeurs de $f'_x(0,0)$ et $f'_y(0,0)$?
3. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 5.

Les ingénieurs chargés de la construction des autoroutes se préoccupent de la pénétration du froid dans le sol et utilisent pour calculer la température T à l'heure t et à la profondeur x (en m) la formule : $T = T_0 e^{-\lambda x} \sin(\omega t - \lambda x)$ où T_0, ω, λ sont des constantes. La période de $\sin(\omega t - \lambda x)$ est 24 heures.

1. Calculer et interpréter $\dfrac{\partial T}{\partial t}$ et $\dfrac{\partial T}{\partial x}$.
2. Montrer que T satisfait l'équation de la chaleur à une dimension $\dfrac{\partial T}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ où k est une constante réelle.

Exercice 6.

on dit qu'une fonction f est harmonique si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ sur tout son domaine de définition. Montrer que les fonctions suivantes sont harmoniques :

1. $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$
2. $g(x,y) = \mathrm{Arc}\tan\dfrac{y}{x}$
3. $h(x,y) = e^{-x}\cos y + e^{-y}\cos x$

Exercice 7.

Calculer les dérivées partielles de $h(x,y) = f(2xy, x)$.

Exercice 8.

Chercher une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x+y$. On appelle ce genre d'équations, une équation aux dérivées partielles.

Exercice 9.

Résoudre les équations aux dérivées partielles :

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x} - 3\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ avec $u = 2x+y$ et $v = 3x+y$.
2. $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2+y^2$ en passant aux coordonnées polaires.

Exercice 10.
Montrer que l'équation de Laplace $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ est équivalente à $g''(r) + \frac{1}{r} g'(r) = 0$ avec $f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$.

Exercice 11.
Dans cet exercice, c désigne un nombre réel strictement positif fixé. Toutes les fonctions étudiées sont à valeurs réelles. On étudie l'équation (E) aux dérivées partielles suivante, dite équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

en la fonction inconnue u, des variables réelles x et t, de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. On appelle g la fonction de classe C^2 telle que $g(X; Y) = u(\frac{X+Y}{2}, \frac{Y-X}{2c})$.

1. On pose $u(x, t) = g(X, Y)$. Exprimer X et Y en fonction de x et t.
2. Calculer $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$ en fonction de g.
3. En déduire $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)$ en fonction de g.
4. Résoudre l'équation $\frac{\partial^2 g}{\partial X \partial Y} = 0$.
5. Déduire des questions précédentes les solutions de l'équation d'ondes.
6. Montrer que l'onde stationnaire d'équation $v(t, x) = (\sin ckt)(\sin kx)$ satisfait l'équation des ondes.

Exercice 12.
Utiliser la règle de dérivation des fonctions composées pour calculer dz pour : $z = x^3 - y^3; x = \frac{1}{t+1}, y = \frac{t}{t+1}$

Exercice 13.
Calculer les différentielles des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = x^2 e^{xy} + \frac{1}{y^2}$
2. $f(x, y) = \ln\left(x^2 + y^2\right) + x \operatorname{Arctan} y$
3. $f(x, y) = \frac{xy}{x+y}$

Exercice 14. Calculer à l'aide de la différentielle une approximation de la variation de f consécutive à la variation indiquée des variables x et y :
$f(x, y) = x^2 - 3x^3y^2 + 4x - 2y^3 + 6$ pour (x, y) variant de $(-2, 3)$ à $(-2,02, 3,01)$.

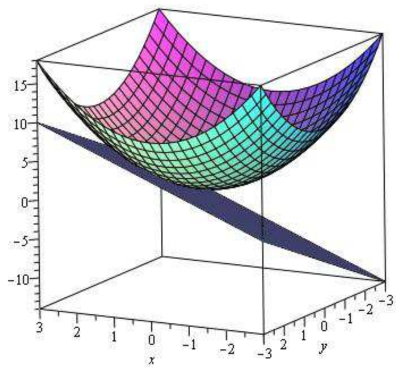
Exercice 15.
La formule donnant la résistance électrique d'un matériau électrique est $R = \dfrac{l}{\gamma S}$ où l est la longueur de la tige, S la surface et γ la conductivité.
Supposons que S, l et γ sont connus avec une marge d'erreur de 10%.

1. Calculer de deux façons différentes $d(\ln R)$
2. En déduire la marge d'erreur commise sur R ?

Exercice 16.
Soit f la fonction définie par $f(x, y) = x^2 + 4y^2$.

1. Calculer le gradient de f en $P(2, -1)$.
2. Interpréter ce gradient.

Exercice 17.
Soit P le paraboloïde d'équation $z = x^2 + y^2$. Déterminer l'équation de son plan tangent au point $M(1, 1, 2)$.



Exercice 18.
Déterminer les points de l'hyperboloïde à deux nappes $x^2 - 2y^2 - 4z^2 = 16$ en lesquelles le plan tangent est parallèle au plan d'équation $4x - 2y + 4z = 5$.