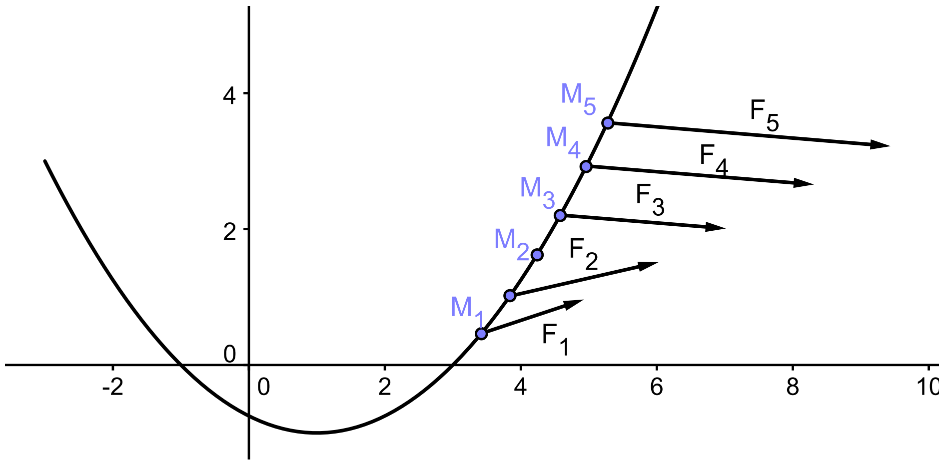
INTÉGRALES CURVILIGNES et INTÉGRALES DE SURFACE

1 intégrale curviligne

Dans tout le paragraphe on considérera une forme différentielle ω de Ω dans $\mathbb{R}$ définie par $\omega(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, où P et Q sont deux fonctions de classe C^1 définies de Ω dans $\mathbb{R}$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Pour simplifier les écritures, ω est définie sur $\mathbb{R}^2$, mais toutes les formules se généralisent pour une forme linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$.

1.1 Introduction : travail d'une force

Considérons une force $\vec{F}$ de coordonnées (F_X, F_Y) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, appliquée en un point M. On suppose que M parcourt un arc paramétré (C), que la position de M est donnée par ses coordonnées paramétriques $(x(t), y(t))$ pour $t \in [a,b]$, et que la force $\vec{F}$ dépend de la position du point M, c'est à dire que $\vec{F}(F_x(t), F_y(t))$.



On peut approcher le travail de $\vec{F}$ sur (C) par $W = \sum \overrightarrow{M_iM_{i+1}}.\vec{F_i}$, avec M_iM_{i+1} petit, on a donc $\overrightarrow{M_iM_{i+1}}(dx, dy)$. Ainsi $\overrightarrow{M_iM_{i+1}}.\overrightarrow{F_i} = F_{xi}dx + F_{yi}dy$
donc $W = \sum F_{xi}dx + F_{yi}dy$.
Lorsque la distance M_iM_{i+1} tend vers 0, la somme tend vers l'intégrale :
$W = \int F_X dx + F_Y dy = \int_a^b \vec{F}.\overrightarrow{dl}$ avec $\overrightarrow{dl}(dx(t), dy(t))$.
En remarquant que les coordonnées (F_X, F_Y) dépendent de x et de y, on peut écrire cette intégrale sous la forme : $W = \displaystyle\int_a^b f(x,y)dx + g(x,y)dy$
On a $\overrightarrow{dl}(dx(t), dy(t))$ c'est à dire $\overrightarrow{dl}(x'(t)dt, y'(t)dt)$.
On a donc : $W = \displaystyle\int_a^b F_X(t)x'(t) + F_Y(t)y'(t)dt$

Cette intégrale s'appelle *la circulation de* $\vec{F}$ le long de la courbe (C).

1.2 Intégrale d'une forme différentielle

1.2.1 Cas général

Définition 1.
Soit (C) un arc paramétré par $(x(t), y(t))$ avec $t \in [a, b]$.
Alors l'intégrale curviligne de ω le long de (C) est définie par :

$$\int_{(C)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)dt$$

Exemple 1.
Soit $\omega = xydx + xdy$
Calculer : $\displaystyle\int_{(C)} \omega$ où (C) a pour équation :
$y = \sqrt{x}$, $1 \leqslant x \leqslant 2$, x allant de 1 vers 2.

Remarque 1.
Le choix du paramétrage de (C) implique une orientation de la courbe, et en particulier nous avons :

Proposition 1. Soit (C^+) la courbe (C) orientée dans un sens et (C^-) la courbe orientée dans l'autre sens. On alors : $\displaystyle\int_{(C^+)} \omega = -\int_{(C^-)} \omega$

Proposition 2. L'intégrale d'une fonction sur une courbe ne dépend pas de la représentation paramétrique de la courbe, la courbe étant décrite dans le même sens.

Exemple 2. Soit $\omega = xy^2dx - x^2ydy$
Soit (C) le cercle de représentations paramétriques : $\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$ et $\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \cos(t) \end{cases}$

Calculer : $\displaystyle\int_{(C)} \omega$ à l'aide des deux représentations paramétriques, la courbe étant décrite dans le sens trigonométrique.

1.2.2 Cas d'une différentielle exacte

Définition 2.
ω est une différentielle exacte (ou totale) signifie qu'il existe une fonction u telle que $\omega = du$, c'est à dire $\omega = \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy$.

Proposition 3.
On suppose que Ω est un ouvert simplement connexe de $\mathbb{R}^2$ (c'est à dire sans trou et d'un seul morceau), alors la forme différentielle ω est exacte si et seulement si :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Exemple 3. Soit ω définie par $\omega = xy^2dx - x^2ydy$. ω est-elle une forme différentielle exacte ?

Proposition 4.
Si ω est une différentielle exacte ($\omega = du$), et $(C) = \widehat{AB}$ alors :

- L'intégrale de ω sur une courbe fermée est nulle.
- L'intégrale de ω sur une courbe ne dépend que des points initial et final. C'est à dire $\displaystyle\int_{(C)} \omega = u(B) - u(A)$

Exemple 4. Démontrer la propriété ci-dessus.

Exemple 5. Soit ω_1 et ω_2 définies par $\omega_1 = xy^2dx - x^2ydy$ et $\omega_2 = xdx + ydy$. Calculer l'intégrale curviligne de ces deux formes sur le cercle de centre O et de rayon 1.

1.3 Formule de Green-Riemann

1.3.1 formule

Soit (C) une courbe fermée orientée sans point double parcourue dans le sens trigonométrique choisi arbitrairement comme sens positif. Soient $P = P(x, y)$ et $Q = Q(x, y)$ des fonctions des deux variables x et y définies et admettant des dérivées partielles sur tout point de (C) et en tout point de l'intérieur D de (C).
La formule de Green-Riemann est :

$$\int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_{(C)} Pdx + Qdy$$

Remarque 2.
Elle permet donc de calculer une intégrale double à l'aide d'une intégrale curviligne. Le choix de P et de Q n'est pas unique. On choisira P et Q de façon à simplifier le calcul.
La formule permet aussi de calculer une intégrale curviligne à l'aide d'une intégrale double.

Exemple 6. Calculer $I = \displaystyle\int\int_D ydxdy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ directement et à l'aide de la formule de Green-Riemann.

1.3.2 Calcul d'aire

Proposition 5.
Soit D un compact de frontière (C). Alors l'aire A de K est égale à :

$$A = \int\int_D dxdy = \frac{1}{2}\oint_{(C)} xdy - ydx = \oint_{(C)} xdy = \oint_{(C)} -ydx$$

2 Exercices

Exercice 1.
On considère la forme différentielle $\omega = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$, définie sur le demi-plan $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$.
Montrer que ω est exacte. Chercher ses primitives sur U.

Exercice 2.
On considère la forme différentielle $\omega = \dfrac{2x}{y}dx - \dfrac{x^2}{y^2}dy$, définie sur le demi-plan $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$.

1. Montrer que ω est exacte.
2. Calculer $\displaystyle\int_{(C)} \omega$ où (C) est une courbe C^1 par morceaux d'origine $A(1,2)$ et d'extrémité $B(3,8)$.

Exercice 3.
On considère la forme différentielle $\omega = (x+y)dx + (x-y)dy$. définie sur le demi-plan $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$.

1. Montrer que ω est exacte.
2. Calculer $\displaystyle\oint_{(C)} \omega$ où (C) est une courbe C^1 par morceaux d'origine $A(1,2)$ et d'extrémité $B(3,8)$.

Exercice 4. Calculer les intégrales curvilignes $\displaystyle\int_{(C)} \omega$ dans les exemples suivants :

1. $\omega = xy\,dx + (x+y)dy$ et où (C) est l'arc de parabole $y = x^2, -1 \leqslant x \leqslant 2$, parcouru dans le sens direct.
2. $\omega = y\sin x\,dx + x\cos y\,dy$ et où (C)est le segment de droite $[OA]$ de $O(0,0)$ vers$A(1.1)$.

Exercice 5. Calculer l'intégrale curviligne de $\omega = x^2dx - xy\,dy$ le long des contours suivants :

1. le segment de droite $[OB]$ de $O(0,0)$ vers$B(1.1)$.
2. l'arc de parabole $x = y^2, 0 \leqslant x \leqslant y$, orienté dans le sens des x croissants.

Exercice 6.
Calculer l'intégrale curviligne de $\omega = \dfrac{x-y}{x^2+y^2}dx + \dfrac{x+y}{x^2+y^2}dy$ le long du carré ABCD, avec A(1,1), B(-1,1), C(-1,-1) et D(1,-1), parcouru dans le sens direct.

Exercice 7.
En utilisant la formule de Green Riemann calculer

$$\oint_\gamma (2xy - x^2)dx + (x+y^2)dy$$

où γ est le bord orienté du domaine délimité par les courbes d'équations $y = x^2$ et $x = y^2$.