INTÉGRALES CURVILIGNES et INTÉGRALES DE SURFACE

1 intégrale curviligne

1.1 Introduction : travail d'une force

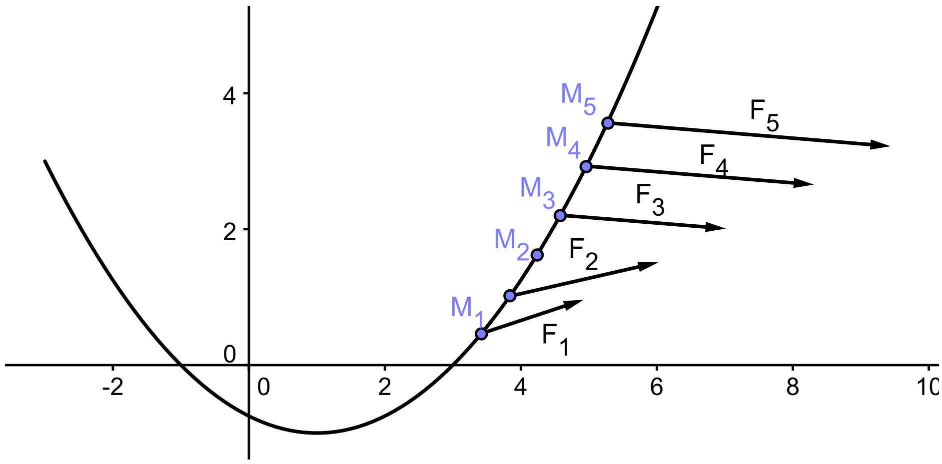
Exemple 1 (Exemple de courbes paramétriques).

1. Soit une courbe paramétrique définie par $x(t) = 2t + 1$ et $y(t) = t^2$.
   Placer les points $M(t)$ de paramètres 0,1 et 2.

2. Tracer la courbe d'équation paramétrique $x(t) = r\cos(t)$ et $y(t) = r\sin(t)$

3. Donner l'équation paramétrique de la courbe ayant pour équation cartésienne $y = f(x)$

Considérons une force $\vec{F}$ de coordonnées (F_X, F_Y) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, appliquée en un point M. On suppose que M parcourt un arc paramétré (C), que la position de M est donnée par ses coordonnées paramétriques $(x(t), y(t))$ pour $t \in [a, b]$, et que la force $\vec{F}$ dépend de la position du point M, c'est à dire que $\vec{F}(F_x(t), F_y(t))$.



On peut approcher le travail de $\vec{F}$ sur (C) par $W = \sum \overrightarrow{M_iM_{i+1}}.\vec{F_i}$, avec M_iM_{i+1} petit, on a donc $\overrightarrow{M_iM_{i+1}}(dx, dy)$. Ainsi $\overrightarrow{M_iM_{i+1}}.\overrightarrow{F_i} = F_{xi}dx + F_{yi}dy$
donc $W = \sum F_{xi}dx + F_{yi}dy$.
Lorsque la distance M_iM_{i+1} tend vers 0, la somme tend vers l'intégrale :
$W = \int F_X dx + F_Y dy = \int_a^b \vec{F}.\overrightarrow{dl}$ avec $\overrightarrow{dl}(dx(t), dy(t))$.
En remarquant que les coordonnées (F_X, F_Y) dépendent de x et de y, on peut écrire cette intégrale sous la forme : $W = \int_a^b f(x, y)dx + g(x, y)dy$
On a $\overrightarrow{dl}(dx(t), dy(t))$ c'est à dire $\overrightarrow{dl}(x'(t)dt, y'(t)dt)$.

On a donc : $W = \int_a^b F_X(t)x'(t) + F_Y(t)y'(t)dt$

Cette intégrale s'appelle *la circulation de* $\vec{F}$ le long de la courbe (C).

Exemple 2. Calculer le travail du poids d'un solide de masse m sur le segment $[AB]$ allant de A vers B avec $A(0,1)$ et $B(1,0)$.

1.2 Intégrale d'une forme différentielle

Définition 1.
Une forme différentielle ω de Ω dans $\mathbb{R}$ est définie par $\omega(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, où P et Q sont deux fonctions de classe C^1 définies de Ω dans $\mathbb{R}$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 3.
Soit $P(x,y) = 2xy$ et $Q(x,y) = x^2$. Écrire la forme différentielle associé à P et Q.

1.2.1 Cas général

Définition 2.
Soit (C) un arc paramétré par $(x(t), y(t))$ avec $t \in [a,b]$.
Alors l'intégrale curviligne de ω le long de (C) est définie par :

$$\int_{(C)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)dt$$

Exemple 4.
Soit $\omega = xydx + xdy$
Calculer : $\int_{(C)} \omega$ où (C) a pour équation :
$y = \sqrt{x}$, $1 \leqslant x \leqslant 2$, x allant de 1 vers 2.

Remarque 1.
Le choix du paramétrage de (C) implique une orientation de la courbe, et en particulier nous avons :

Proposition 1. Soit (C^+) la courbe (C) orientée dans un sens et (C^-) la courbe orientée dans l'autre sens. On alors : $\int_{(C^+)} \omega = -\int_{(C^-)} \omega$

Proposition 2. L'intégrale d'une fonction sur une courbe ne dépend pas de la représentation paramétrique de la courbe, la courbe étant décrite dans le même sens.

Exemple 5. Soit $\omega = xy^2dx - x^2ydy$
Soit (C) le cercle de représentations paramétriques : $\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$ et $\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \cos(t) \end{cases}$
Calculer : $\int_{(C)} \omega$ à l'aide des deux représentations paramétriques, la courbe étant décrite dans le sens trigonométrique.

1.2.2 Cas d'une différentielle exacte

Définition 3.
ω est une différentielle exacte (ou totale) signifie qu'il existe une fonction u telle que $\omega = du$, c'est à dire $\omega = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$.

Remarque 2.
Une différentielle exacte est donc une application différentielle d'une fonction.

Proposition 3.
On suppose que Ω est un ouvert simplement connexe de $\mathbb{R}^2$ (c'est à dire sans trou et d'un seul morceau), alors la forme différentielle ω est exacte si et seulement si :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Exemple 6. Soit ω définie par $\omega = xy^2dx - x^2ydy$. ω est-elle une forme différentielle exacte ?

Proposition 4.
Si ω est une différentielle exacte ($\omega = du$), et $(C) = \widehat{AB}$ alors :

- L'intégrale de ω sur une courbe ne dépend que du point initial et final. C'est à dire $\displaystyle\int_{(C)} \omega = u(B) - u(A)$
- L'intégrale de ω sur une courbe fermée est nulle.

Exemple 7. Démontrer la propriété ci-dessus.

Exemple 8. Soit ω_1 et ω_2 définies par $\omega_1 = xy^2dx - x^2ydy$ et $\omega_2 = xdx + ydy$. Calculer l'intégrale curviligne de ces deux formes sur le cercle de centre O et de rayon 1.

1.3 Formule de Green-Riemann

1.3.1 formule

Soit (C) une courbe fermée orientée sans point double parcourue dans le sens trigonométrique choisi arbitrairement comme sens positif. Soient $P = P(x, y)$ et $Q = Q(x, y)$ des fonctions des deux variables x et y définies et admettant des dérivées partielles sur tout point de (C) et en tout point de l'intérieur D de (C).
La formule de Green-Riemann est :

$$\int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{(C)} Pdx + Qdy$$

Remarque 3.
Elle permet donc de calculer une intégrale double à l'aide d'une intégrale curviligne. Le choix de P et de Q n'est pas unique. On choisira P et Q de façon à simplifier le calcul.
La formule permet aussi de calculer une intégrale curviligne à l'aide d'une intégrale double.

Exemple 9. Calculer $I = \iint_D y\,dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ directement et à l'aide de la formule de Green-Riemann.

1.3.2 Calcul d'aire

Proposition 5.
Soit D un compact de frontière (C). Alors l'aire A de K est égale à :

$$A = \iint_D dxdy = \frac{1}{2}\int_{(C)} xdy - ydx = \int_{(C)} xdy = \int_{(C)} -ydx$$

1.4 Application à la physique

(pour information sera détaillée en physique)

1.4.1 Champ de vecteurs

Soit $\mathfrak{A}$ une partie de l'espace. On dit qu'il existe un champ de vecteurs défini sur $\mathfrak{A}$ si en tout point M de $\mathfrak{A}$ il existe un vecteur $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E}(M)$.
L'exemple le plus simple est le champ de pesanteur : $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{g}(M) = -g\overrightarrow{k}$ au voisinage du sol qui est un champ constant car g est une constante.

1.4.2 Circulation d'un champ de vecteurs

Soit M un point du plan où existe un champ de vecteurs $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E}(M)$. On déplace M d'une quantité infinitésimale $d\overrightarrow{M}$. Par définition, la circulation infinitésimale associée à ce déplacement infinitésimal est

$$\delta W = \overrightarrow{E}.d\overrightarrow{M}$$

Si $\overrightarrow{E}$ est une force $\overrightarrow{F}$ par exemple, δW représente donc le travail infinitésimal de $\overrightarrow{F}$ lors du déplacement infinitésimal $d\overrightarrow{M}$.
Supposons que le champ de vecteurs $\overrightarrow{E}$ ait pour composantes P, Q dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, alors

$$\delta W = \left(P\overrightarrow{i} + Q\overrightarrow{j}\right).(dx\overrightarrow{i} + dy\overrightarrow{j}) = Pdx + Qdy$$

C'est donc on l'a déjà vu, une forme dite différentielle. Ainsi, une forme différentielle peut toujours s'interpréter comme la circulation infinitésimale d'un champ de vecteurs.
Remarquez l'utilisation du δ plutôt que du d. dW est réservé aux variations infinitésimales d'une fonction, c'est à dire aux champs de vecteurs dérivant d'un potentiel (Voir paragraphe suivant). Si on ne sait pas si s'en est une, on utilise δ.
Si on fait circuler le champ de vecteurs $\overrightarrow{E}$ le long d'une courbe orientée (C) allant de d'un point A à un point B, par déplacements successifs $d\overrightarrow{M}$ le long de (C) dans le sens positif (choisi arbitrairement), alors la circulation du champ $\overrightarrow{E}$ le long de cette courbe orientée (C)

est définie comme la somme de toutes les circulations infinitésimales δW lorsque M va de A jusqu'à B. C'est à dire que l'on a :

$$W = \int_{(C)} \delta W = \int_{(C)} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dM} = \int_{(C)} Pdx + Qdy$$

Définition 4.
La circulation du champ $\overrightarrow{E}$ le long de la courbe orientée (C) est $W = \int_{(C)} \delta W = \int_{(C)} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dM}$.

Exemple 10. Calculer : Soit $\vec{F}(x+y, y)$ une force appliquée sur un mobile qui se déplace le long du segment $[OB]$ avec $B(2;4)$ et le long de la parabole d'équation $y = x^2$ pour $x \in [0;2]$.

1.4.3 Potentiel scalaire

Définition 5.
Soit $\overrightarrow{E}$ un champ de vecteurs. On dit que ce champ de vecteurs dérive d'un potentiel scalaire, s'il existe une fonction $V = V(x, y)$ telle que $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}V$.

Exemple 11.
$\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{k}$ le champ de pesanteur dérive d'un potentiel scalaire car $\overrightarrow{g} = -\overrightarrow{grad}V$ où $V = mgz$.

Proposition 6.
Si $\vec{E}$ dérive d'un champ de potentiel V, alors $\vec{E}.\overrightarrow{dM}$ est une forme différentielle exacte : $\vec{E}.\overrightarrow{dM} = -\frac{\partial V}{\partial x}dx - \frac{\partial V}{\partial y}dy$

D'après le paragraphe précédent, on en déduit :

Théorème 7.
Soit $\overrightarrow{E}$ un champ de vecteur qui dérive d'un potentiel scalaire V. La circulation de ce champ de vecteurs $\overrightarrow{E}$ entre deux points A et B ne dépend pas du chemin suivi et on a

$$W_{A \hookrightarrow B} = V(A) - V(B)$$

Exemple 12.
Reprendre l'exemple 6 avec $\vec{F}(x, y)$.

2 Intégrales de surfaces

Une intégrale de surface est une intégrale de la forme :

$$I = \int\int_{\Sigma} f(M)d\sigma$$

Ici Σ désigne une surface de l'espace. Le point M décrit la surface Σ. f est une fonction de M et $d\sigma$ est un morceau infinitésimal de Σ entourant le point M. On remarque donc que les intégrales doubles du poly. sur les intégrales multiples sont un cas particulier avec Σ surface plane du plan xOy.

Exemple 13. Calculer $I = \int\int_{\Sigma} z^2 d\sigma$ où Σ est la surface de la sphère de centre O et de rayon R.

3 Opérateurs de l'analyse vectorielle

On définit l'opérateur nabla : $\overrightarrow{\nabla}. = \frac{\partial .}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial .}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial .}{\partial z}\overrightarrow{k}$.

Ainsi on a : $\overrightarrow{\mathrm{grad}} U = \overrightarrow{\nabla} U$.

Soit $\overrightarrow{E}$ un champ de vecteurs tel que $\overrightarrow{E} = E_x\overrightarrow{i} + E_y\overrightarrow{j} + E_z\overrightarrow{k}$ alors on a :

Le divergent de $\overrightarrow{E}$ est : $\mathrm{div}\,\overrightarrow{E} = \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{E} = \left(\frac{\partial .}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial .}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial .}{\partial z}\overrightarrow{k}\right).(E_x\overrightarrow{i} + E_y\overrightarrow{j} + E_z\overrightarrow{k})$ d'où

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Le rotationnel de $\overrightarrow{E}$ est : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{E} = \left(\frac{\partial .}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial .}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial .}{\partial z}\overrightarrow{k}\right) \wedge (E_x\overrightarrow{i} + E_y\overrightarrow{j} + E_z\overrightarrow{k})$ d'où

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{i} - \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{k}$$

Et le Laplacien du potentiel scalaire U est :

$$\Delta U = \mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}} U\right) = \overrightarrow{\nabla}^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Enfin on a comme propriétés très classiques :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}} U\right) = \overrightarrow{0}$$

$$\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E}\right) = 0$$

4 Exercices

Exercice 1.
On considère la forme différentielle $\omega = 2xe^y dx + x^2e^y dy$ définie sur $\mathbb{R}^2$.
Montrer que ω est exacte. Chercher ses primitives sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2.
On considère la forme différentielle $\omega = \dfrac{2x}{y}dx - \dfrac{x^2}{y^2}dy$, définie sur le demi-plan $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y > 0\}$.

1. Montrer que ω est exacte.
2. Calculer $\displaystyle\int_{(C)} \omega$ où (C) est une courbe C^1 par morceaux d'origine $A(1, 2)$ et d'extrémité $B(3, 8)$.

Exercice 3.
On considère la forme différentielle $\omega = (x + y)dx + (x - y)dy$. définie sur le demi-plan $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y > 0\}$.

1. Montrer que ω est exacte.
2. Calculer $\displaystyle\int_{(C)} \omega$ où (C) est une courbe C^1 par morceaux d'origine $A(1, 2)$ et d'extrémité $B(3, 8)$.

Exercice 4. Calculer les intégrales curvilignes $\displaystyle\int_{(C)} \omega$ dans les exemples suivants :

1. $\omega = xydx + (x + y)dy$ et où (C) est l'arc de parabole $y = x^2, -1 \leqslant x \leqslant 2$, parcouru dans le sens des x croissants.
2. $\omega = y \sin x dx + x \cos y dy$ et où (C)est le segment de droite $[OA]$ de $O(0, 0)$ vers$A(1.1)$.

Exercice 5. Calculer l'intégrale curviligne de $\omega = x^2dx - xydy$ le long des contours suivants :

1. le segment de droite $[OB]$ de $O(0, 0)$ vers$B(1.1)$.
2. l'arc de parabole $y = \sqrt{x}$ et la droite d'équation $y = x$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, orienté dans le sens des x croissants sur la droite d'équation $y = x$.

Exercice 6.
Calculer l'intégrale curviligne de $\omega = \dfrac{x - y}{x^2 + y^2}dx + \dfrac{x + y}{x^2 + y^2}dy$ le long du carré ABCD, avec A(1,1), B(-1,1), C(-1,-1) et D(1,-1), parcouru dans le sens direct.

Exercice 7. Calculer les intégrales suivantes grâce à la Formule de Green-Riemann.

1. $\displaystyle\int\int_D y dxdy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x - 1)^2 + y^2 \leqslant 1 \,; y \geqslant 0\}$,

2. Soit $0 < b < a$. $\displaystyle\iint_D \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right) dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\}$
3. Soit a un paramètre > 0. $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}} dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leqslant x \leqslant a ; 0 \leqslant y \leqslant 1\}$

Exercice 8. Soit $R > 0$ et $a > 0$. Calculer l'intégrale de surface $I = \displaystyle\iint_\Sigma f(M) d\sigma$ où $f(M) = \dfrac{z}{x^2+y^2}$ et Σ est le cylindre d'équation $x^2+y^2 = R^2$ et $0 \leqslant z \leqslant a$.