Intégration et Primitives

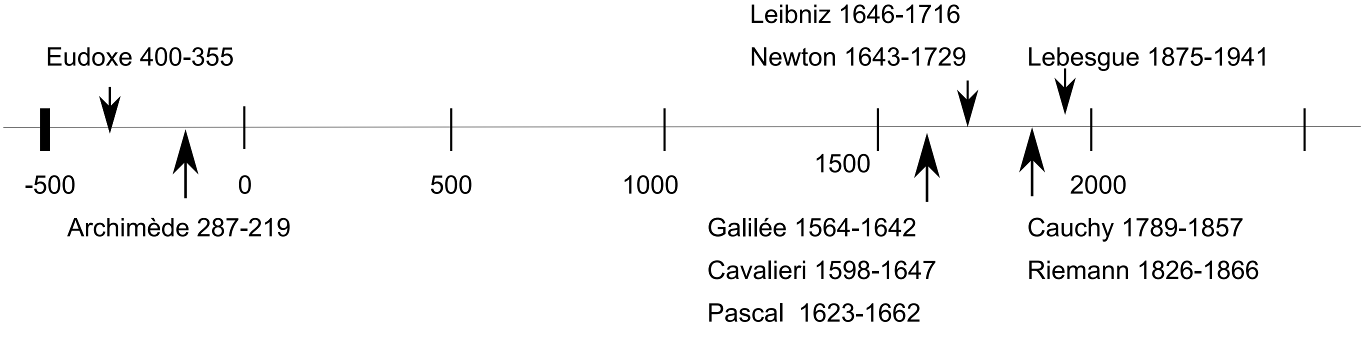
Objectifs
- **Connaître lien entre primitives et intégrales**
- **Connaître les techniques classiques de calcul intégrales**

Le calcul intégral ou l'intégration, a pour objectif fondamental le calcul des aires. Cependant, même si les exercices que l'on voit dans ce chapitre peuvent conduire à penser que le calcul d'une intégrale passe par celui d'une primitive, très souvent ce calcul est irréalisable. On doit alors se résoudre à utiliser des calculs numériques qui donnent des approximations de cette intégrale.

1 Intégrale de Riemann

1.1 L'intégration au cours des siècles

L'intégration a été introduite pour le calcul d'aire et de volume dans la Grèce antique. C'est à Eudoxe (400-355 av JC environ) que l'on doit les premiers calculs d'aires et de volumes à l'aide d'empilement de plaques dont l'épaisseur tend vers 0 ; Archimède (287-219 av JC) perfectionne la méthode d'Eudoxe (qui est mentionnée dans les éléments d'Euclide).
A la fin du moyen-age, (1560-1660), Cavalieri, Galilée et Pascal reprennent et améliorent les calculs d'aire et de volume par empilement de petits rectangles ou de parallélépipèdes, mais de façon non rigoureuse. Ils obtiennent cependant de très bonnes approximations.
Il faut attendre, Newton (1643-1729) et Leibniz (1646-1716), avec le calcul infinitésimal, pour démontrer le rapport entre les primitives d'une fonction et le calcul d'aire (C'est à Leibniz que l'on doit la notation $\int$).
Cauchy(1789-1857), en définissant de façon rigoureuse la notion de limite, donne une définition rigoureuse de l'intégrale avec les fonctions continues, puis Riemann (1826-1866) définit l'intégrale pour des fonctions continues par morceaux.
Lebesgue(1875-1941) étend la notion à des classes de fonctions plus générales que des fonctions continues par morceaux.



1.2 Approximation par des rectangles.

Dans ce paragraphe, on cherche à donner une approximation de l'aire sous la courbe d'une fonction f régulière (par exemple continue ou continue par morceaux) sur un segment $[a, b]$. Pour cela, on va découper le segment $[a, b]$ en une union de n segments de petite taille.

Définition 1. *Subdivision d'un segment* $[a, b]$.

Une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ (en n parties) est la donnée de $n+1$ points $\sigma = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ tels que

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

La largeur de la i-ième partie est donnée par $x_i - x_{i-1}$ et on note $\delta(\sigma) = \max\limits_{i \in \{1,...,n\}} x_i - x_{i-1}$ le maximum de ces largeurs.

Exemple 1. La subdivision régulière en n parties du segment $[a, b]$ est la subdivision telle que pour tout i, $x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$, c'est-à-dire :

$$\forall i \in \{0, ..., n\}, \quad x_i = a + i\frac{b-a}{n}.$$

Soit f une fonction bornée sur $[a; b]$. On considère une subdivision σ de $[a; b]$. Pour approximer l'aire de f sur $[a, b]$, on va approximer l'aire sur chacun des intervalles $[x_{i-1}, x_i]$ de la subdivision. Il existe plusieurs manières de procéder (sommes de Darboux, approximation par des rectangles à droite / à gauche, approximation par des trapèzes). On présente ici **l'approximation par des rectangles** à droite.

Définition 2. Approximation par des rectangles à droite.
L'approximation de l'aire de f par des rectangles par la subdivision σ est donnée par

$$S(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i).(x_i - x_{i-1}).$$

Exemple 2. On pose $f(x) = 1$ et $g(x) = x$ pour tout $x \in [0, 1]$.

1. Donner l'expression de la subdivision régulière de $[0, 1]$ à n points.
2. Représenter les graphes de f et g et calculer leur aire entre $[0, 1]$.
3. On donne $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Calculer l'approximation de l'aire par des rectangles pour f et g pour la subdivision régulière.

1.3 Intégrale de Riemann

Proposition 1. Intégrale des fonctions régulières
Soit f une fonction continue (par morceaux) sur $[a, b]$. Soit (σ_n) une suite de subdivisions telles que $\delta(\sigma_n) \underset{n \to +\infty}{\to} 0$. Alors la suite des approximations de l'aire par des rectangles converge et on note :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} S(f,\sigma_n).$$

On l'appelle l'**intégrale de f sur** $[a,b]$.

Remarque 1.

- $\int$ se lit *somme* car il vient de la limite de Σ.
- Dans $f(x)dx$, $f(x)$ correspond aux $f(x_i)$ et dx correspond à $x_i - x_{i-1}$ dans l'approximation.
- Cette limite ne dépend pas du choix des subdivisions (σ_n).
- Lorsque σ_n est la subdivision régulière, l'approximation par des rectangles s'appelle une **somme de Riemann** de f et on a :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n}.$$

  En particulier, si $[a,b] = [0,1]$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} = \int_0^1 f(x)dx.$$

Remarque 2.
Certaines fonctions n'ont pas d'intégrale en ce sens. Par exemple la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et 0 n'est pas intégrale au sens de Riemann. (Cette fonction est intégrable au sens de Lebesgue).

1.4 Propriétés fondamentales

Soit f et g deux fonctions intégrables au sens de Riemann sur un intervalle $[a;b]$ et λ un réel.

1.4.1 Linéarité

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g \quad ; \quad \int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$$

1.4.2 Positivité

Si $f \geqslant 0$ sur l'intervalle $[a;b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f \geqslant 0$

1.4.3 Croissance

Si $g \geqslant f$ sur $[a;b]$ alors : $\displaystyle\int_a^b g \geqslant \int_a^b f$.

1.4.4 Majoration en valeur absolue (Inégalité triangulaire).

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$$

1.4.5 Inégalité de la moyenne

$$\left|\int_a^b fg\right| \leqslant \sup|f| \times \int_a^b |g|$$

En particulier, (en prenant g=1) : $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \sup|f| \times (b-a)$

1.4.6 Valeur moyenne d'une fonction

La valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a;b]$ est : $M = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f$

1.4.7 Relation de Chasles

$\forall c \in [a;b]$, $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

1.4.8 Inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2 \times \int_a^b g^2$$

1.5 Lien avec l'aire sous la courbe

Propriété 1.
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$.

- Si f est **positive** sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ est l'aire de la surface comprise entre la représentation graphique de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.
- Si f est **négative** sur $[a,b]$ alors $-\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ est l'aire de la surface comprise entre la représentation graphique de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.
- Si f est de signes quelconque, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \sum$ des aires des surfaces au-dessus de (0x) $-$ $\sum$ des aires des surfaces en-dessous de (0x).

2 Primitives

2.1 Définition et propriétés

Définition 3.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. $F : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de f sur I si et seulement si F est dérivable sur I et $F' = f$.

Proposition 2.
Soient $f, F, G : I \to \mathbb{R}$ telles que F soit une primitive de f sur I, alors $G - F = K$ où K est une constante réelle. Cela signifie que les primitives de f sont toutes égales entre elles à une constante près.

Exemple 3. 1. Donner une primitive de la fonction $f(x) = 4x^3$.

2. Donner **toutes** les primitives de la fonction $g(x) = x^3$.

2.2 Théorème fondamental du calcul différentiel

Soit f une fonction continue sur I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. La fonction $F : x \to \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.
Ainsi on a :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Remarque 3.
Si f est une fonction continue sur l'intervalle I, la notation $\int f(x)dx$ désigne une primitive quelconque de f. Ainsi, par exemple, on a : $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$

Remarque 4.
Lorsque f n'est pas continue, le théorème précédent devient faux : une fonction continue par morceaux est intégrable mais n'admet pas de primitive.

Exemple 4. Déterminer $\int_1^3 x^3 dx$.

2.3 Primitives des fonctions usuelles

Soit u une fonction définie sur un ensemble I de $\mathbb{R}$.

$f(x)$	$F(x)$	Pour $u(x) \in \ldots$
$u'u^\alpha, \alpha \neq -1$	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}, \mathbb{R}_+^*$ si $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\|u\|$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$u' \cos u$	$\sin u$	$\mathbb{R}$
$u' \sin u$	$-\cos u$	$\mathbb{R}$
$u' \tan u$	$-\ln\|\cos u\|$	$]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$
$u'e^u$	e^u	$\mathbb{R}$
$u' \operatorname{ch} u$	$\operatorname{sh} u$	$\mathbb{R}$
$u' \operatorname{sh} u$	$\operatorname{ch} u$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\operatorname{Arctan} u$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{u'}{1-u^2}$	$\operatorname{Argth} u$	$]-1; 1[$
$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\operatorname{Arcsin} u$	$]-1; 1[$
$-\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\operatorname{Arccos} u$	$]-1; 1[$
$\dfrac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$	$\operatorname{Argsh} u$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$	$\operatorname{Argch} u$	$]1; +\infty[$
$\dfrac{u'}{\cos^2(u)}$	$\tan u$	$]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$
$\dfrac{u'}{\operatorname{ch}^2 u}$	$\operatorname{th} u$	$\mathbb{R}$

Exemple 5. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t+1} + \cos(t) + e^t dt$
2. $\displaystyle\int_0^1 2x.e^{x^2} dx$
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{1+(\cos(x))^2} dx$

2.4 Intégrale fonction de ses bornes

Soient u, v des fonctions de $I \to J$ et f continue sur J. On peut définir :

$$F : \left(\begin{array}{c} x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt \\ I \to \mathbb{R} \end{array} \right)$$

Si u et v sont continues sur I alors F est continue sur I. Si u et v sont dérivables sur I, alors F est dérivable sur I et pour tout x dans I on a :

$$F'(x) = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x)$$

Exemple 6.
Montrer la formule précédente.

3 Intégration par parties et changement de variable

3.1 Intégration par parties

Soient $u, v : [a; b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a; b]$. On a :

$$\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$$

Exemple 7.
Calculer $\displaystyle\int_0^1 x \sin(2x) dx$

3.2 Changement de variable

3.2.1 Cas général

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, continue sur l'intervalle I et $\phi : [a; b] \to I$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a; b]$. On a :

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx$$

Dans la pratique, on peut utiliser cette formule de gauche à droite, de droite à gauche, et pour déterminer une primitive :
De gauche à droite

- On pose $x = \phi(t)$, et on remplace $\phi(t)$ par x.
- On calcule $dx = \phi'(t)dt$, et on remplace $\phi'(t)dt$ par dx.
- On modifie les bornes : t varie de a à b donc x varie de $\phi(a)$ à $\phi(b)$.

Exemple 8.
Calculer : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos t}$ en posant $x = \sin t$

De droite à gauche

- On pose $x = \phi(t)$, et on remplace x par $\phi(t)$.
- On calcule $dx = \phi'(t)dt$, et on remplace dx par $\phi'(t)dt$.
- On modifie les bornes : x varie de $\phi(a)$ à $\phi(b)$ donc t varie de a à b.

Exemple 9.
Calculer : $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx$ en posant $x = \cos t$

Pour calculer une primitive
On ne tient pas compte des bornes.

- De gauche à droite : on remplace x par $\phi(t)$.

- De droite à gauche : il faut que ϕ soit une bijection de I sur $f(I)$, on remplace alors t par $\phi^{-1}(x)$.

Exemple 10.
Calculer les primitives des exemples **??** et **??**.

3.2.2 Cas des fonctions trigonométriques.

Si $f(x) = \cos(x)^n \sin(x)^p$, on peut utiliser des formules de trigonométries pour obtenir une expression que l'on sait traiter.

- Soit par linéarisation : On rappelle que $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ et $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$.
- Soit si l'une des puissances est impaire, on peut utiliser que $\cos^2 + \sin^2 = 1$:

Exemple 11.

1. Calculer $\displaystyle\int_0^\pi (\sin(t))^2 dt$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^\pi (\cos(x))^3.\sin(x)^2 dx$.

Si f est une fonction définie par $f(t) = \dfrac{P(\cos(t), \sin(t))}{Q(\cos(t), \sin(t))}$ où P et Q sont des polynômes à deux variables, à coefficients réels, on peut essayer de calculer son intégrale en faisant un changement de variable approprié.

Exemple 12. En faisant le changement de variables $u = \cos(t)$, calculer $\displaystyle\int_a^b \frac{(\cos(t))^3}{\sin(t)(1+\cos^2(t))} dt$.

4 Calcul pratique des primitives

Pour calculer une primitive d'une fonction f, on peut utiliser une des méthode suivante :

1. Formules inverse des dérivées : f est sous la forme $\dfrac{u'}{u}$, $u'u^n$, etc
2. Intégration par parties
   - Exemples classiques : $f(x) = P(x)e^{ax}$, $f(x) = P(x)\sin(ax)$ et $f(x) = P(x)Ln(Q(x))$ où P et Q sont deux polynômes.
   - Si I est la primitive, alors I est solution d'une équation.
3. Cas où $f(x) = \sin^n x \cos^p x$
   - Si n et p sont pairs, alors on linéarise f.
     On rappelle que $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ et $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$
   - Si n ou p sont impairs, on écrit f comme une somme de $u'u^k$ avec $u = \cos$ ou $u = \sin$.
4. Primitive d'une fonction rationnelle.
   - On décompose f en éléments simples.
5. Changement de variables

5 Application du calcul intégral

5.1 Centre de gravité d'une plaque homogène

Soit S un plaque homogène d'épaisseur constante et de masse volumique uniforme. Le centre de gravité se calcule avec une intégrale double (que l'on verra plus tard), mais dans le cas particulier où la surface est délimitée par le graphe d'une fonction f, l'axe Ox et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, on obtient le point de coordonnées :
$x_G = \dfrac{1}{A}\displaystyle\int_a^b xf(x)dx$ et $y_G = \dfrac{1}{2A}\displaystyle\int_a^b (f(x))^2 dx$ avec A l'aire de la surface.

Exemple 13.
Calculer le centre d'inertie de la surface délimitée par l'arc de parabole d'équation $y = 2\sqrt{x}$, l'axe Ox et la droite d'équation $x = h$.

6 Exercices

Exercice 1. 1. Sans calcul, déterminer $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)dt$.

2. Représenter la courbe $y = \sqrt{1-x^2}$ pour $x \in [-1,1]$ (on pourra regarder y^2). En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx$.

Exercice 2. Exprimer les limites des suites suivantes avec des intégrales :

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$
2. $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}\sin(\frac{k\pi}{n})$
3. $w_n = \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(n+k)}$

   Pour cette dernière, on pourra dans un premier temps transformer le produit en somme à l'aide d'une fonction bien choisie.

Exercice 3. Calculer $\displaystyle\int_0^3 (x-2)dx$ et interpréter géométriquement cette intégrale.

Exercice 4.
Calculer les intégrales et primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(2x+1)^3}$
2. $\displaystyle\int_2^3 \frac{dt}{(1-t)^2}$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1+u}}$
4. $\displaystyle\int_{-1}^0 \sqrt{1-x}dx$
5. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2+1}{\sqrt{x}}dx$
6. $\displaystyle\int_2^3 \frac{(1-t)^2}{t\sqrt{t}}dt$
7. $\displaystyle\int \frac{z}{\sqrt{z^2-1}}dz$
8. $\displaystyle\int \frac{t}{1+t^2}dt$
9. $\displaystyle\int \frac{t+1}{t^2+4}dt$

10. $\displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)^2}dx$ 11. $\displaystyle\int \frac{e^x}{\operatorname{ch} x}dx$ 12. $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 13. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}-x^3e^{2x}+x^2}{x^3}dx$

Exercice 5.

1. Déterminer la valeur moyenne sur une période d'un signal purement sinusoïdal $u(t) = u_0 cos(\omega t + \varphi_0)$
2. La valeur efficace de $u(t)$ est par définition la racine carré de la moyenne sur une période de $u^2(t)$. On dit que la valeur efficace est la moyenne quadratique de u. Déterminer la valeur efficace u_{eff} du signal précédent.

Exercice 6.
Calculer les intégrales et primitives suivantes grâce à une intégration par parties :

1. $\displaystyle\int_0^1 x\ln(1+x)\,dx$
2. $\displaystyle\int_0^3 \operatorname{Arctan}(2x)\,dx$
3. $\displaystyle\int_0^1 x\operatorname{Arctan} x dx$
4. $\displaystyle\int \operatorname{Arcsin} x dx$
5. $\displaystyle\int \theta\sin 2\theta d\theta$
6. $\displaystyle\int x^2e^{-x}dx$
7. $\displaystyle\int \frac{\alpha}{\cos^2\alpha}d\alpha$
8. $\displaystyle\int x^3\operatorname{Arctan} x dx$

Exercice 7.
Calculer $\displaystyle\int \sqrt{x^2+1}dx$ grâce à une IPP

Exercice 8.
Calculer la primitive suivante (à l'aide d'une double IPP) :

$$I(x) = \int_0^x \cos(2t)e^t dt$$

Exercice 9.
Calculer par linéarisation :
1. $\displaystyle\int \cos^2 x dx$ 2. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 t + t}{3}dt$

Exercice 10.
Calculer sans linéarisation :
1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx$ 2. $\displaystyle\int \operatorname{sh}^3 t dt$ 3. $\displaystyle\int \cos^2 x\sin 2x dx$

Exercice 11.

1. i) Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\dfrac{1}{(x-1)(x-4)} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x-4}$.

   ii) Calculer $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{t^2-5t+4}dt$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^3}{x+1}dx$. On pourra faire apparaître un polynôme en $(x+1)$ au numérateur.

Exercice 12.
Calculer grâce aux changements de variables indiqués :

1. $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x^3}{\sqrt{x+1}}dx \quad \left(t=\sqrt{x+1}\right)$
2. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}}{x}dx$ en posant $u=\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}$
3. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{a}{2}} \sqrt{a^2-x^2}dx \quad (x=a\sin t)$
4. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sh}^3 x}{\operatorname{ch}^5 x}dx \quad (y=\operatorname{ch} x)$
5. Calculer $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ en posant $u=\sqrt[6]{x}$

Exercice 13.
Calculer en effectuant les changements de variables indiqués :

1. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^4\theta d\theta$, avec $x=\tan(\theta)$.
2. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan x}dx$ avec $y=\tan(x)$.
3. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin t}dt$ avec $x=\cos(t)$.

Exercice 14.
Calculer l'aire de la surface délimitée par les courbes d'équation $y=x^2$, $y=1-x^2$ et $x=0$.

Exercice 15.
On considère une plaque homogène formé par l'ensemble des points M(x ;y) du plan dont les coordonnées vérifient les relations : $0\leqslant x\leqslant 2$ et $0\leqslant y\leqslant \dfrac{x}{x+1}$. Donner les coordonnées du centre de gravité de la plaque.