Intégration et Primitives

Objectifs

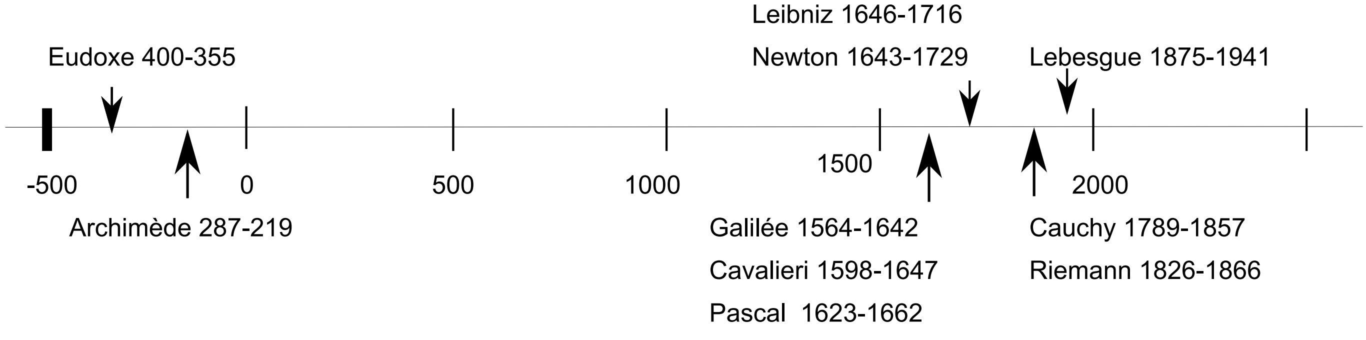
- **Connaître lien entre primitives et intégrales**
- **Connaître les techniques classiques de calcul intégrales**

Le calcul intégral ou l'intégration, a pour objectif fondamental le calcul des aires. Cependant, même si les exercices que l'on voit dans ce chapitre peuvent conduire à penser que le calcul d'une intégrale passe par celui d'une primitive, très souvent ce calcul est irréalisable. On doit alors se résoudre à utiliser des calculs numériques qui donnent des approximations de cette intégrale.

1 CM1 : Intégrale de Riemann

1.1 L'intégration au cours des siècles

L'intégration a été introduite pour le calcul d'aire et de volume dans la Grèce antique. C'est à Eudoxe (400-355 av JC environ) que l'on doit les premiers calculs d'aires et de volumes à l'aide d'empilement de plaques dont l'épaisseur tend vers 0 ; Archimède (287-219 av JC) perfectionne la méthode d'Eudoxe (qui est mentionnée dans les éléments d'Euclide).
A la fin du moyen-age, (1560-1660), Cavalieri, Galilée et Pascal reprennent et améliorent les calculs d'aire et de volume par empilement de petits rectangles ou de parallélépipèdes, mais de façon non rigoureuse. Ils obtiennent cependant de très bonnes approximations.
Il faut attendre, Newton (1643-1729) et Leibniz (1646-1716), avec le calcul infinitésimal, pour démontrer le rapport entre les primitives d'une fonction et le calcul d'aire (C'est à Leibniz que l'on doit la notation $\displaystyle\int$).
Cauchy(1789-1857), en définissant de façon rigoureuse la notion de limite, donne une définition rigoureuse de l'intégrale avec les fonctions continues, puis Riemann (1826-1866) définit l'intégrale pour des fonctions continues par morceaux.
Lebesgue(1875-1941) étend la notion à des classes de fonctions plus générales que des fonctions continues par morceaux.



1.2 Sommes de Darboux(1842-1917)

Définition 1. *Majorant, borne supérieure et maximum.*
Soit f une fonction bornée sur un intervalle $[a, b]$.

- **Un** majorant de f sur $[a, b]$ est un réel M tel que pour tout x de $[a, b]$, $f(x) \leqslant M$.
- **La** borne supérieure de f sur $[a, b]$ est le plus petit des majorants. On le note $\underset{x\in[a;b]}{sup}\ f(x)$
- Le maximum de f sur $[a, b]$, est un réel M tel que pour tout x de $[a, b]$, $f(x) \leqslant M$ et il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $M = f(x_0)$. On le note $\underset{x\in[a;b]}{max} f(x)$

Vidéo : *Explication et exemple sur la définition 1*

Exemple 1.
Les affirmations suivantes sont elles vraies ou fausses ?

1. Un majorant est un maximum.
2. Un maximum est un majorant.
3. Une fonction bornée admet toujours un maximum sur $[a, b]$.
4. Une fonction bornée admet toujours une borne supérieure sur $[a, b]$.

On définit de la même façon les notions de minorant, borne inférieure et minimum.

Soit f une fonction bornée sur $[a; b]$. On considère une subdivision σ de $[a; b]$ qu'on note :
$\sigma = \{x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b\}$.
On pose pour $i \in \{1; 2; ...n\}$:
$m_i = \underset{x\in[x_{i-1};x_i]}{inf} f(x)$, $M_i = \underset{x\in[x_{i-1};x_i]}{sup} f(x)$ et $\delta(\sigma) = \max\limits_{i\in\{1,2,\dots,n\}} x_i - x_{i-1}$.

Vidéo : *Explications sur un exemple des lettres définies ci-dessus*

Définition 2.
On appelle somme de Darboux inférieure associée à f et σ le nombre :

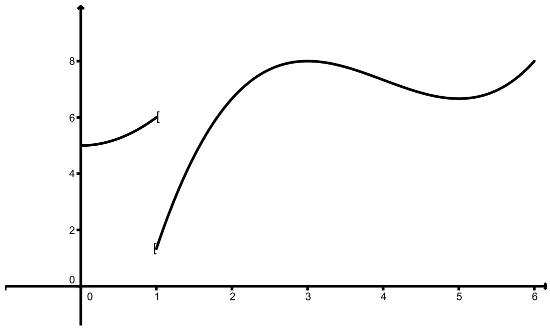
$$s_{[a;b]}(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{i=n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

.
On appelle somme de Darboux supérieure associée à f et σ le nombre :

$$S_{[a;b]}(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{i=n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

.

Exemple 2.
On considère la fonction dont on a la représentation graphique suivante :



On considère la subdivision σ suivante : $x_0 = a = 0$, $x_1 = 1,5$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$ et $x_4 = 5 = b$.

1. Justifier que $\underset{x\in[x_0;x_1]}{sup} f(x)$ n'est pas un maximum.
2. Calculer les deux sommes de Darboux.
3. Représenter les surfaces dont les sommes de Darboux sont les aires.

1.3 Intégrale de Riemann

Définition 3.
On dit qu'une fonction f est intégrable sur $[a, b]$ au sens de Riemann lorsque $\lim\limits_{\delta(\sigma)\to 0} S(f,\sigma) - s(f,\sigma) = 0$.

L'intégrale est alors notée : $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

et on a : $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta(\sigma)\to 0} S(f,\sigma) = \lim_{\delta(\sigma)\to 0} s(f,\sigma)$

Exemple 3.
Montrer que la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et 0 sinon, n'est pas intégrale au sens de Riemann. (Cette fonction est intégrable au sens de Lebesgue).

Remarque 1.

- $\displaystyle\int$ se lit *somme* car il vient de la limite de Σ.
- Dans $f(x)dx$, $f(x)$ correspond aux M_i et m_i et dx correspond à $x_i - x_{i-1}$ lorsque $\delta(\sigma)$ tend vers 0.
- Lorsque σ est une subdivision régulière, et f intégrable sur $[a, b]$ au sens de Riemann, on a :
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n})\frac{b-a}{n}.$$

Propriété 1.
Les fonctions suivantes sont intégrables au sens de Riemann :

- Les fonctions continues par morceaux.
- Les fonctions monotones.

1.4 CM2 : Propriétés fondamentales

Soit f et g deux fonctions intégrables au sens de Riemann sur un intervalle $[a; b]$ et λ un réel.

1.4.1 Linéarité

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$$

Exemple 4.

Vidéo : Début de la démonstration

1.4.2 Positivité

Si $f \geqslant 0$ sur l'intervalle $[a;b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f \geqslant 0$

1.4.3 Croissance

Si $g \geqslant f$ sur $[a;b]$ alors : $\displaystyle\int_a^b g \geqslant \int_a^b f$.

Exemple 5. Démonstration

1.4.4 Majoration en valeur absolue

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$$

1.4.5 Valeur moyenne d'une fonction

La valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a;b]$ est : $M = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f$

Vidéo : *Interprétation de la formule de la valeur moyenne*

1.4.6 Relation de Chasles

$\forall c \in [a;b]$, $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

1.4.7 Inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2 \times \int_a^b g^2$$

2 Primitives

2.1 Définition et propriétés

Définition 4.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. $F : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de f sur I si et seulement si F est dérivable sur I et $F' = f$.

Proposition 1.
Soient $f, F, G : I \to \mathbb{R}$ telles que F soit une primitive de f sur I, alors $G - F = K$ où K est une constante réelle. Cela signifie que les primitives de f sont toutes égales entre elles à une constante près.

2.2 Primitives des fonctions usuelles

Soit u une fonction définie sur un ensemble I de $\mathbb{R}$.

$f(x)$	$F(x)$	Pour $u(x) \in ...$
$u'u^\alpha, \alpha \neq -1$	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}, \mathbb{R}_+^*$ si $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\|u\|$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$u' \cos u$	$\sin u$	$\mathbb{R}$
$u' \sin u$	$-\cos u$	$\mathbb{R}$
$u' \tan u$	$-\ln\|\cos u\|$	$]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$
$u'e^u$	e^u	$\mathbb{R}$
$u' \operatorname{ch} u$	$\operatorname{sh} u$	$\mathbb{R}$
$u' \operatorname{sh} u$	$\operatorname{ch} u$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\operatorname{Arctan} u$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{u'}{1-u^2}$	$\operatorname{Argth} u$	$]-1; 1[$
$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\operatorname{Arcsin} u$	$]-1; 1[$
$-\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\operatorname{Arccos} u$	$]-1; 1[$
$\dfrac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$	$\operatorname{Argsh} u$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$	$\operatorname{Argch} u$	$]1; +\infty[$
$\dfrac{u'}{\cos^2(u)}$	$\tan u$	$]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$
$\dfrac{u'}{\operatorname{ch}^2 u}$	$\operatorname{th} u$	$\mathbb{R}$

Exemple 6.
Calculer les primitives des fonctions suivantes.

1. $f_1(x) = 2xe^{x^2}$

2. $f_2(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$
3. $f_3(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$
4. $f_4(x) = \dfrac{2}{4x^2+1}$
5. $f_5(x) = \dfrac{1}{x}\ln(x)$

2.3 Théorème fondamental du calcul différentiel

Soit f une fonction continue sur I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. La fonction $F : x \to \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.
Ainsi on a :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Exemple 7.
Calculer $\displaystyle\int_1^2 x + 1dx$

Remarque 2.
Soit f est une fonction continue sur l'intervalle I

- La notation $\displaystyle\int f(x)dx$ désigne une primitive quelconque de f. Ainsi, par exemple, on a : $\displaystyle\int x^2dx = \frac{1}{3}x^3 + C$.
- Soit F définie par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$, avec $a \in I$.
  F est la primitive de f qui s'annule en a.

Exemple 8. 1. Soit f est une fonction continue sur l'intervalle I, et F la fonction définie par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$, avec $a \in I$. Calculer F'.

2. Soit f est une fonction dérivable sur l'intervalle I . Calculer $\displaystyle\int_a^b f'(t)dt$.

Remarque 3.
Lorsque f n'est pas continue, le théorème précédent devient faux :

- On peut avoir f qui admet une primitive et f non intégrable.
  Exemple :
  On considère la fonction F définie sur $[0\,;1]$ par $F(x) = x^2\sin(\dfrac{1}{x^2})$ sur $]0\,;1]$ et $F(0) = 0$.
  On montre que F est dérivable sur $[0\,;1]$ et que $F'(x) = 2x\sin(\dfrac{1}{x^2}) - \dfrac{2}{x}\cos(\dfrac{1}{x^2})$ sur $]0\,;1]$ et $F'(0) = 0$.
  Soit h la fonction définie par $h(x) = 2x\sin(\dfrac{1}{x^2})$ sur $]0\,;1]$ et $h(0) = 0$ et la fonction g définie par $g(x) = -\dfrac{2}{x}\cos(\dfrac{1}{x^2})$ sur $]0\,;1]$ et $g(0) = 0$.

h est continue sur $[0\,;1]$ elle admet donc une primitive H sur $[0;1]$.
On a donc $g = F' - h = F' - H' = (F-H)'$, donc g admet $F-H$ comme primitive.
Mais g n'est pas intégrable sur $[0\,;1]$, car g n'est pas bornée en 0.

- Une fonction continue par morceaux est intégrable mais n'admet pas de primitive.

3 Intégration par parties et changement de variable

3.1 Intégration par parties

Soient $u, v : [a;b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a;b]$. On a :

$$\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$$

Exemple 9.
Calculer $\displaystyle\int_0^1 x\sin(2x)dx$

3.2 CM 3 Changement de variable

3.2.1 Cas général

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, continue sur l'intervalle I et $\phi : [a;b] \to I$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$. On a :

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx$$

Dans la pratique, on peut utiliser cette formule de gauche à droite, de droite à gauche, et pour déterminer une primitive :

De gauche à droite

- On pose $x = \phi(t)$, et on remplace $\phi(t)$ par x.
- On calcule $dx = \phi'(t)dt$, et on remplace $\phi'(t)dt$ par dx.
- On modifie les bornes : t varie de a à b donc x varie de $\phi(a)$ à $\phi(b)$.

Vidéo : *Un exemple de changement de variable pour calculer l'intégrale,*

Vidéo : *et la primitive dans l'exemple suivant.*

Exemple 10.
Calculer : $\displaystyle\int_4^9 \frac{\sqrt{t}}{1+t}dt$ en posant $x = \sqrt{t}$
Indication pour calculer l'intégrale avec x : $x^2 = (x^2+1) - 1$
En déduire les primitives de $t \to \dfrac{\sqrt{t}}{1+t}$

De droite à gauche

- On pose $x = \phi(t)$, et on remplace x par $\phi(t)$.
- On calcule $dx = \phi'(t)dt$, et on remplace dx par $\phi'(t)dt$.

- On modifie les bornes : x varie de $\phi(a)$ à $\phi(b)$ donc t varie de a à b.

Pour calculer une primitive

On ne tient pas compte des bornes.

- De gauche à droite : on remplace x par $\phi(t)$.
- De droite à gauche : il faut que ϕ soit une bijection de I sur $f(I)$, on remplace alors t par $\phi^{-1}(x)$.

Vidéo : Un exemple de changement de variable et de calcul de primitive pour faire l'exemple suivant.

Exemple 11.

Calculer : $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ en posant $x = \cos t$ et donner une primitive de $\sqrt{1-x^2}$

3.2.2 Règles de Bioche

Soit f une fonction définie par $f(t) = \dfrac{P(\cos(t), \sin(t))}{Q(\cos(t), \sin(t))}$ où P et Q sont des polynômes à deux variables, à coefficients réels.

Pour calculer $\displaystyle\int f(t)dt$, on définit $\omega(t) = f(t)dt$.

On pourra alors poser comme changement de variables :

- $u = \cos(t)$, si $\omega(-t) = \omega(t)$.
- $u = \sin(t)$, si $\omega(\pi - t) = \omega(t)$.
- $u = \tan(t)$, si $\omega(\pi + t) = \omega(t)$.
- $u = \tan(t/2)$ dans les autres cas.

En posant $u = \tan\dfrac{t}{2}$, on a : $\cos t = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$; $\sin t = \dfrac{2u}{1+u^2}$ et $\tan t = \dfrac{2u}{1-u^2}$.

Vidéo : Règle de Bioche dans les cas 1) et 2)

Vidéo : *Règle de Bioche dans les cas 3) et 4)*

Exemple 12.

Déterminer et effectuer le changement de variable à poser pour les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int \frac{\cos^2(t)\sin(t)}{1+\cos(t)}dt$
2. $\displaystyle\int \frac{\cos(t)}{1+\sin(t)}dt$
3. $\displaystyle\int \frac{\cos(t)}{\sin(t)(1+\cos^2(t))}dt$
4. $\displaystyle\int \frac{\sin(t)}{1+\sin(t)}dt$

4 Calcul pratique des primitives

Pour calculer une primitive d'une fonction f, on peut utiliser une des méthode suivante :

1. Formules inverse des dérivées : f est sous la forme $\frac{u'}{u}$, $u'u^n$, etc
2. Intégration par parties
   - Exemples classiques : $f(x) = P(x)e^{ax}$, $f(x) = P(x)\sin(ax)$ et $f(x) = P(x)Ln(Q(x))$ où P et Q sont deux polynômes.
   - Si I est la primitive, alors I est solution d'une équation.
3. Cas où $f(x) = \sin^n x \cos^p x$
   - Si n et p sont pairs, alors on linéarise f.
     On rappelle que $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ et $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$
   - Si n ou p sont impairs, on écrit f comme une somme de $u'u^k$ avec $u = \cos$ ou $u = \sin$.
4. Primitive d'une fonction rationnelle.
   - On décompose f en éléments simples.
5. Changement de variables
   - Cas général
   - Règles de Bioche
   - Primitive de $f(\sqrt{ax+b})$ avec f une fonction rationnelle.

5 Application du calcul intégral

5.1 Calcul d'aire

Propriété 2.
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

- Si f est **positive** sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire de la surface comprise entre la représentation graphique de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.
- Si f est **négative** sur $[a, b]$ alors $-\int_a^b f(x)dx$ est l'aire de la surface comprise entre la représentation graphique de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.
- Si f est de signes quelconque, $\int_a^b f(x)dx = \sum$ des aires des surfaces au-dessus de ox $-$ $\sum$ des aires des surfaces en-dessous de ox

Exemple 13.
Calculer $\int_0^3 x - 2dx$ et interpréter géométriquement cette intégrale.

5.2 Centre de gravité d'une plaque homogène

Soit S un plaque homogène d'épaisseur constante et de masse volumique uniforme. Le centre de gravité se calcule avec une intégrale double (que l'on verra plus tard), mais dans le cas

particulier où la surface est délimitée par le graphe d'une fonction f, l'axe Ox et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, on obtient le point de coordonnées :
$x_G = \dfrac{1}{A}\displaystyle\int_a^b xf(x)dx$ et $y_G = \dfrac{1}{2A}\displaystyle\int_a^b (f(x))^2 dx$ avec A l'aire de la surface.

Exemple 14.
Calculer le centre d'inertie de la surface délimitée par l'arc de parabole d'équation $y = 2\sqrt{x}$, l'axe Ox et la droite d'équation $x = h$.

6 Exercices

Exercice 1.

1. On pose, pour tout x réel, $I(x) = \displaystyle\int_0^x t dt$.

(a) I est-elle une intégrale ? Une primitive ?

(b) Faire un dessin et, par un calcul d'aire, en donner une expression en fonction de x.

(c) Vérifier votre résultat à l'aide d'un calcul de primitive,

(d) puis à l'aide d'une somme de Darboux.

2. Calculer les limites des suites suivantes à l'aide de la formule donnée dans la remarque 1 :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$$
$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$
$$w_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} (n+k)}$$

Pour cette dernière, on pourra dans un premier temps transformer le produit en somme à l'aide d'une fonction bien choisie.

Exercice 2.
Soient u, v des fonctions dérivables de $I \to J$ et f continue sur J. On peut définir :

$$F : \begin{pmatrix} x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt \\ I \to \mathbb{R} \end{pmatrix}$$

Calculer la dérivée de F.

Exercice 3.
Calculer les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x+1)^3}$
2. $\displaystyle\int \frac{dt}{(1-t)^2}$
3. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{1+u}}$
4. $\displaystyle\int \sqrt{1-x}dx$
5. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x}}dx$

6. $\displaystyle\int \frac{(1-t)^2}{t\sqrt{t}}dt$ 8. $\displaystyle\int \frac{t}{1+t^2}dt$ 10. $\displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)^2}dx$ 12. $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

7. $\displaystyle\int \frac{z}{\sqrt{z^2-1}}dz$ 9. $\displaystyle\int \frac{t+1}{t^2+4}dt$ 11. $\displaystyle\int \frac{e^x}{\operatorname{ch} x}dx$ 13. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}-x^3e^{2x}+x^2}{x^3}dx$

Exercice 4.

1. Déterminer la valeur moyenne sur une période d'un signal purement sinusoïdal $u(t) = u_0 cos(\omega t + \varphi_0)$
2. La valeur efficace de $u(t)$ est par définition la racine carré de la moyenne sur une période de $u^2(t)$. On dit que la valeur efficace est la moyenne quadratique de u. Déterminer u_{eff} du signal précédent.

Exercice 5.
Calculer les primitives suivantes grâce à une intégration par parties :

1. $\displaystyle\int x\ln(1+x)\,dx$ 3. $\displaystyle\int x \operatorname{Arctan} x dx$ 5. $\displaystyle\int \theta \sin 2\theta d\theta$ 7. $\displaystyle\int \frac{\alpha}{\cos^2\alpha}d\alpha$

2. $\displaystyle\int \operatorname{Arctan}(2x)\,dx$ 4. $\displaystyle\int \operatorname{Arcsin} x dx$ 6. $\displaystyle\int x^2e^{-x}dx$ 8. $\displaystyle\int x^3 \operatorname{Arctan} x dx$

Exercice 6. Facultatif
calculer $\displaystyle\int \sqrt{x^2+1}dx$ grâce à une IPP

Exercice 7.
Calculer la primitive suivante (à l'aide d'une double IPP) :

$$I(x) = \int_0^x \cos(2t)e^t dt$$

Exercice 8.
Calculer par linéarisation :
1. $\displaystyle\int \cos^2 x dx$ 2. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 t + t}{3}dt$

Exercice 9.
Calculer sans linéarisation :
1. $\displaystyle\int \cos^5 x dx$ 2. $\displaystyle\int \operatorname{sh}^3 t dt$ 3. $\displaystyle\int \cos^2 x \sin 2x dx$

Exercice 10.
Calculer grâce aux changements de variables indiqués :

1. $\displaystyle\int_1^0 \frac{x^3}{\sqrt{x+1}}dx \quad \left(t=\sqrt{x+1}\right)$ 2. $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}}{x}dx$ en posant $u = \sqrt{\dfrac{1+x}{x}}$

3. $\displaystyle\int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{a^2-x^2}dx \quad (x = a\sin t)$

4. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sh}^3 x}{\operatorname{ch}^5 x}dx \quad (y = \operatorname{ch} x)$ 5. Calculer $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ en posant $u = \sqrt[6]{x}$

Exercice 11.
Calculer en utilisant les règles de Bioche :
1. $\displaystyle\int \tan^4 \theta d\theta$ 2. $\displaystyle\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx$ 3. $\displaystyle F(x) = \int \frac{1}{1+\tan x}dx$ 4. $\displaystyle F(t) = \int \frac{1}{\sin t}dt$

Exercice 12.
Calculer l'aire de la surface délimitée par les courbes d'équation $y = x^2$, $y = 1 - x^2$ et $x = 0$.

Exercice 13.
On considère une plaque homogène formé par l'ensemble des points M(x ;y) du plan dont les coordonnées vérifient les relations : $0 \leqslant x \leqslant 2$ et $0 \leqslant y \leqslant \dfrac{x}{x+1}$. Donner les coordonnées du centre de gravité de la plaque.