Correction exercice 20

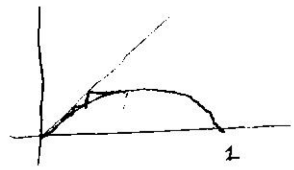
x	0		$1/2$		1
f	0	$\nearrow$	$\frac{k}{4}$	$\searrow$	0

$f'(x) = -k(2x-1)$

I. si $k \in]0;1]$

A) Soit $I = [0, \frac{1}{2}]$ et $u_0 \in]0, \frac{1}{2}]$

- $f(I) = [0, \frac{k}{4}] \subset I$
  f croissante sur I
  $u_0 \in I$
  $\Big\} \Rightarrow (u_n)$ est monotone.



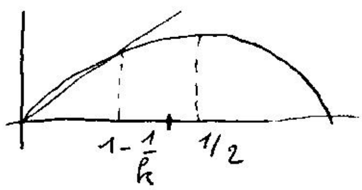
- $f(u_0) = \underbrace{k}_{\leq 1}\underbrace{(1-u_0)}_{\leq 1}u_0 \leq u_0 \Rightarrow \underline{(u_n)\searrow}$
- I borné et $(u_n)\searrow \Rightarrow (u_n)$ converge vers ℓ.
- $f(\ell) = \ell \Leftrightarrow \ell = k(\ell)(1-\ell) \Leftrightarrow \ell = 0$ ou $\ell = 1 - \frac{1}{k} \leq 0$

or $\ell \in I$, donc $\ell = 0$ donc $\underline{(u_n) \text{ converge vers } 0}$

B) si $u_0 \in [\frac{1}{2}; 1]$

alors d'après le tableau de variations, $u_1 \in [0, \frac{1}{2}]$
on retrouve donc les mêmes résultats que dans la partie A.

II si $k \in]1, 2]$



A) soit $u_0 \in I = [0, \frac{1}{2}]$, $u_0 \neq 0$

- De même qu'en I A), (u_n) monotone.
- $u_1 \leq u_0 \Leftrightarrow k u_0(1-u_0) \leq u_0 \Leftrightarrow k(1-u_0) \leq 1$ car $u_0 > 0$
  $\Leftrightarrow u_0 \geq 1 - \frac{1}{k}$

i) si $u_0 \geq 1 - \frac{1}{k}$

- $\underline{(u_n)\searrow}$ et $(u_n) \to \ell$ avec $f(\ell) = \ell$.
  d'après I A) $\ell = 0$ ou $\ell = 1 - \frac{1}{k}$

~~$(u_n)\searrow$ et $u_0 > 1 - \frac{1}{k} \Rightarrow$~~

Montrons que $u_n \geq 1-\frac{1}{k}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

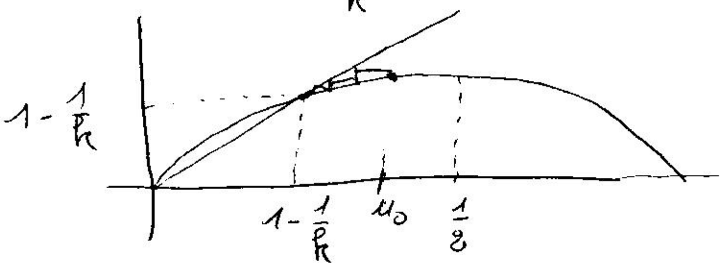
- Vraie pour $n=0$
- Supposons que $u_n \geq 1-\frac{1}{k} \Rightarrow f(u_n) \geq f(1-\frac{1}{k})$

$\Rightarrow u_{n+1} \geq k\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\left(1-\frac{1}{k}\right)\right)$

$\Rightarrow u_{n+1} \geq 1-\frac{1}{k}$.

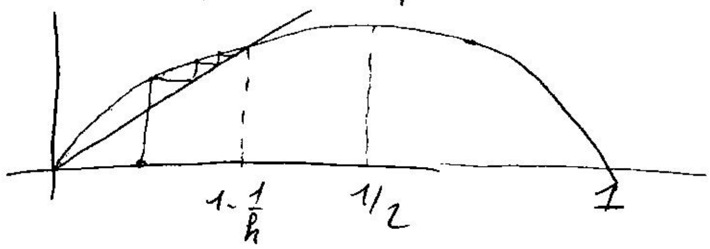
$\Rightarrow$ $u_n \geq 1-\frac{1}{k}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

donc $(u_n) \to 1-\frac{1}{k}$



(ii) si $u_0 < 1-\frac{1}{k}$

on démontre de même que (i) que $(u_n) \nearrow$ et $u_n \to 1-\frac{1}{k}$



(iii) si $u_0 = 1-\frac{1}{k}$ La suite est constante et égale à $1-\frac{1}{k}$

B) Si $u_0 \in [\frac{1}{2}, 1]$, $u_1 \in [0, \frac{1}{2}] \Rightarrow$ on revient au A).

III Si $k > 2$ (et $k \leq 4$)

On peut avoir $u_n > \frac{1}{2}$ et $f \searrow$ sur $[\frac{1}{2}; 1]$, on ne peut donc pas appliquer les résultats précédents.

Quelques exemples avec des comportements différents :

- $u_0 = 0,2$ et $k = 3,5$, la suite n'est pas monotone et elle ne converge pas. • Il semble que $u_{4n} \to 0,82 (\simeq)$

$u_{4n+1} \to \simeq 0,50$

$u_{4n+2} \to \simeq 0,87$

$u_{4n+3} \to \simeq 0,38$

- $u_0 = 0,1$ et $k = 2,1$, la suite est $\nearrow$ et converge vers $1-\frac{1}{k}$
- $u_0 = 0,4$ et $k = 2,5$, la suite est constante à partir du rang 1 et est égale à $1-\frac{1}{k} = 0,6$.