

Ex 1 :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = 3 \\ 3x + 5y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow AX = B \quad \text{avec} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad A \in M_{3,2}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ex 2 :

$$(S) \begin{cases} x - z = 1 \\ -y - z = 1 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = B$$

Considérons la matrice A associée à ce système

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Calculons } \det A = 0 + 0 + 0 - [-1 - 2 + 0] = 3$$

$\det A \neq 0$
 $\Rightarrow$ le système
 (S) est de
 Cramer

$\det A \neq 0$
 donc ce système est de Cramer et admet
 une unique solution :

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

On remplace la 1^{ère} colonne de A par le second membre

$$\text{avec} \quad x = \frac{\det(B, c_2, c_3)}{\det A} = \frac{1}{3}$$

1^{ère} composante

or

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det(B, C_2, C_3) = 0 + 0 - 2 - [1 - 2 + 0] = -1$$

$$\Rightarrow \boxed{x = -1/3}$$

De la m^{ème} façon nous avons:

$$y = \frac{\det(C_1, \textcircled{B}, C_3)}{\det A}$$

↓
2^{ème} composante
inconnue

$$\begin{vmatrix} \overset{C_1}{1} & \overset{C_3}{-1} \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

or par Sarrus $\det(C_1, B, C_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

$$= 0 + 1 + 0 - [1 - 1 + 0] = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 1/3}$$

De m^{ème}

$$z = \frac{\det(C_1, C_2, \textcircled{B})}{3}$$

↓
3^{ème} composante
inconnue

$$\det(C_1, C_2, B) =$$

$$\begin{vmatrix} \overset{C_1}{1} & \overset{C_2}{0} & \overset{B}{1} \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -1 + 0 + 0 - [1 + 2 + 0]$$

$$= -4$$

$$\Rightarrow \boxed{z = -4/3}$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_S = \left\{ \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{4}{3} \right) \right\}$$

Ex 3:
$$\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=2 \\ x+2y+mz=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix}$$

$$\text{rang } A = \text{rang} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$= \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix}$$

$$L'_2 \leftarrow L'_2 - L'_1$$

$$= \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & m-1 \end{pmatrix}$$

cas 1: $m-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ alors $\text{rang } A = 3$ $\Leftrightarrow$ Cramer.

cas 2: $m-1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ alors $\text{rang } A = 2$.

Ex 4:
$$\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+y=3 \\ 3x+5y=1 \end{cases}$$

2 inconnues $p=2$
3 equations

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{rang } A = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 3L_1 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} &= \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &L'_2 \leftarrow L'_2 + 2L'_1 \end{aligned} \right.$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{rg} A = \dim \text{Vect}(C_1, C_2) \\ \text{or } C_1 \text{ et } C_2 \text{ non} \\ \text{colinéaires} \\ = 2 \end{array} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ = \boxed{2} \end{array} \right.$$

- On va donc extraire de A $\hat{=}$ rang A = 2 une sous matrice carrée de taille 2-2:

on extrait la matrice $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\det B = -1$ (donc de rang 2)

et on résout le système correspondant aux lignes de B qui lui est de Cramer:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases} : \text{ce système admet une unique solution}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{-1} = 2 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{-1} = -1$$

- On regarde si la solution trouvée $(2, -1)$ satisfait la dernière équation: $3x + 5y = 1$
or $3 \times 2 + 5 \times (-1) = 1$

Par suite $\mathcal{Y}(S_2) = \{(2, -1)\}$

Ex 5:

$$\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x-y-z+t=2 \\ x+y+z-t=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rang } A = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\Rightarrow \text{rang } A = 3$$

Nous avons ici 4 inconnues $>$ rang A

On va alors extraire dans A une sous-matrice B de rang 3 et résoudre le sous-système associé

$$A = \begin{pmatrix} \overset{c_1}{1} & \overset{c_2}{1} & \overset{c_3}{1} & \overset{c_4}{1} \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\cancel{B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

la 1^{re}, la 2^e et la 4^e inconnues vont être les inconnues principales

x, y, t inconnues principales

On ne garde que les inconnues principales à gauche

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} \underline{c_1} & \underline{c_2} & \underline{c_4} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y+t = 1-z \\ x-y+t = 2+z \\ x+y-t = 3-z \end{cases}$$

on a "transposé" les inconnues secondaires

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$1 + 1 + 1 - [-1 + 1 - 1] = 4$$

comme $\det B \neq 0$

Le sous-syst associé est de Cramer, il admet une unique solution:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-\beta & 1 & 1 \\ 2+\beta & -1 & 1 \\ 3-\beta & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\det B}$$

$$= \frac{1}{4} \left[(1-\beta) \times 0 - (2+\beta) \times (-2) + (3-\beta) \times 2 \right]$$

$$= \frac{2+\beta+3-\beta}{2} = \frac{5}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-\beta & 1 \\ 1 & 2+\beta & 1 \\ 1 & 3-\beta & -1 \end{vmatrix}}{\det B}$$

$$= \frac{1}{4} \left[(1-\beta) \times (-2) \times (-1) + (2+\beta) \times (-2) + (-1) \times (3-\beta) \times 0 \right]$$

$$= \frac{1-\beta-2-\beta}{2} = \frac{-1-2\beta}{2} = -\frac{1}{2} - \beta$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-\beta \\ 1 & -1 & 2+\beta \\ 1 & 1 & 3-\beta \end{vmatrix}}{\det B}$$

$$= \frac{1}{4} \left[(1-\beta) \times 2 - (2+\beta) \times 0 + (3-\beta) \times (-2) \right]$$

$$= \frac{1-\beta-3+\beta}{2} = -1$$

Les solutions du système initial

sont donc: $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2} - \beta, \boxed{\beta}, -1 \right)$ $\beta \in \mathbb{R}$

Ex 6: retour sur l'exemple avec un paramètre

$$(S) \begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 2 \\ x + 2y + mz = 3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1(m-2) + 1 = m-1$$

Cas 1: $m \neq 1$ $\text{rang } A = 3$

le système est de Cramer et admet donc une unique solution qui s'exprime comme suit:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & m \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{(-1) \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + m \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{1-m}{m-1} = -1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & m \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{(-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + m \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-2+2m}{m-1} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{m-1} = \frac{-1+1}{m-1} = 0$$

$$S = \{(-1, 2, 0)\}$$

Cas 2: $m = 1$ $\text{rang } A = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

on va donc extraire dans A une sous-matrice carrée de taille 2×2 :

Si $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Inconnues principales: x, y

$$(S_6) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ y = 2 - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y \\ = -1 + z \\ y = 2 - z \end{cases}$$

Ce sous-système qui est de Cramer
admet 1 unique solution qui est $(-1+3, 2-3)$

Reinjectons là dans la dernière équation:

$$x + 2y + z = 3$$

$$\Leftrightarrow -1+3 + 2(2-3) + z = 3$$

$$\Leftrightarrow -1+3 + 4 - 2z + z = 3$$

$$\Leftrightarrow 3 = 3 \quad \text{c'est vrai}$$

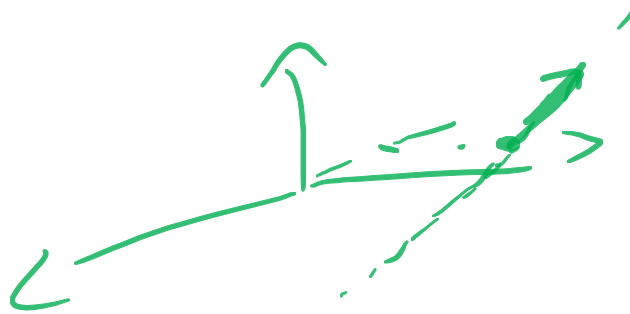
$$= \underline{(-1, 2, 0)} + \underline{z(1, -1, 1)}$$

$$= \underline{(-1, 2, 0)} + \underline{(3, -3, 3)}$$

$$S(S_6) = \{ (-1+3, 2-3, z) \mid z \in \mathbb{R} \}$$

infinite
de solutions

$$= \{ \underline{(-1, 2, 0)} + \underline{(3, -3, 3)} \}.$$



droite
passant par
le point
de coordonnées
 $(-1, 2, 0)$
et de vecteur
directeur $(1, -1, 1)$