# Exemple 1

Les deux questions suivantes sont indépendantes.
Soit $(E)$ l'équation différentielle : $(y-1)y' = 4x+2$.

1. Que peut-on dire des solutions de $(E)$ pour $x = -\frac{1}{2}$ ?
   $(y(-\frac{1}{2})-1)y'(-\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow y(-\frac{1}{2}) = 1 \quad ou \quad y'(-\frac{1}{2}) = 0$

# Exemple 1

1. La fonction $f$ définie par $f(x) = 2x + 2$ est-elle une solution de $(E)$ ?

$$f(x) = 2x + 2 \Rightarrow f'(x) = 2$$

et

$$(f(x) - 1)f'(x) = (2x + 1)2 = 4x + 2$$

donc $f$ est bien solution de $E$.

# Exemple 1

1. Un étudiant affirme : " les fonctions $g_k : x \longrightarrow 1+\sqrt{4x^2+4x+k}$ où $k$ est une constante, sont solutions de l'équation $(E)$."

$$g_k(x) = 1+\sqrt{4x^2+4x+k} \Rightarrow g_k'(x) = \frac{8x+4}{2\sqrt{4x^2+4x+k}}$$

et

$$(g_k(x)-1)g_k'(x) = \sqrt{4x^2+4x+k}\,\frac{8x+4}{2\sqrt{4x^2+4x+k}} = 4x+2$$

donc ces fonctions sont bien solutions de $E$.

# Exemple 1

Un autre étudiant lui répond : "Ce n'est pas possible car :

- On a déjà une solution.
- Le produit de $(y-1)y'$ est le polynôme $4x+2$, il ne peut donc pas y avoir une racine carré dans la solution.
- Lorsque que l'on remplace la fonction dans $y'(1-y)$ il restera la constante $k$, alors que dans $4x+2$ il n'y a pas de constante.

Qui des deux étudiants a raison ? Le premier

# Exemple 1

1. Peut-il y avoir d'autres solutions ? Oui par exemple

$$h_k(x) = 1 - \sqrt{4x^2 + 4x + k} \Rightarrow h_k'(x) = -\frac{8x+4}{2\sqrt{4x^2+4x+k}}$$

et

$$(h_k(x) - 1)h_k'(x) = -\sqrt{4x^2+4x+k}\,\frac{-(8x+4)}{2\sqrt{4x^2+4x+k}} = 4x+2$$

# Exemple 1

1. Déterminer les solutions de l'équation $2x' + 3x = t$.

Normalisation : $x' + \frac{3}{2}x = \frac{1}{2}t$

Résolution de l'équation homogène : $x' + \frac{3}{2}x = 0$

$x_h(t) = ke^{-\frac{3}{2}t} k \in \mathbb{R}$

Recherche d'une solution particulière : $x_p(t) = at + b$

$x_p' + \frac{3}{2}x_p = \frac{t}{2} \Rightarrow a + \frac{3}{2}(at+b) = \frac{t}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{3} \quad b = \frac{-2}{9}$ et

$x_p(t) = \frac{1}{3}t + \frac{-2}{9}$

Solution générale : $S = \{x \mapsto ke^{-\frac{3}{2}t} + \frac{1}{3}t + \frac{-2}{9} \quad k \in \mathbb{R}\}$

# Exemple 2

1. Résoudre l'équation différentielle : $2y' + xy = 0$.
   Normalisation : $y' + \frac{x}{2}y = 0$
   Résolution de l'équation homogène :

$$a(x) = \frac{x}{2} \Rightarrow A(x) = \frac{x^2}{4}$$

$$S_H = \{x \mapsto ke^{-A(x)} = ke^{-\frac{x^2}{4}}\}$$

# Exemple 2

1. Démonstration du théorème : soit $A$ une primitive de $a$ et supposons que $(H)$ admette une solution $f$. Soit $g$ la fonction définie par $g(x) = f(x)e^{A}$.
   1. Exprimer $f$ en fonction de $g$.

$$f(x) = g(x)e^{-A(x)}$$

$$f'(x) = g'(x)e^{-A(x)} + g(x)[-A'(x)e^{-A(x)}]$$

$$f'(x) = g'(x)e^{-A(x)} - a(x)g(x)e^{-A(x)}$$

# Exemple 2

1. Sachant que $f$ est une solution de $(H)$, déterminer $g'$ et en déduire $g$. Comme $f$ est une solution de (H)

$$f' + af = 0$$

$$\Rightarrow g'(x)e^{-A(x)} - a(x)g(x)e^{-A(x)} + a(x)g(x)e^{-A(x)} = 0$$

$$\Rightarrow g'(x)e^{-A(x)} = 0 \Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow g(x) = cst$$

2. En déduire les éventuelles solutions de $(H)$. De $f(x) = g(x)e^{-A(x)}$ nous en déduisons donc que $f(x) = ke^{-A(x)} \quad k \in \mathbb{R}$
3. En déduire les solutions de $(H)$. Réciproquement les fonctions de la forme $f(x) = ke^{-A(x)}$ sont bien solutions car $f'(x) + a(x)f(x) = -a(x)ke^{-A(x)} + a(x)ke^{-A(x)} = 0$.

# Exemple 3

**Méthode de la variation de la constante**

- On cherche $g$ sous la forme $g(x) = k(x)e^{-A}$.
  $g'(x) = k'(x)e^{-A(x)} + k(x)(-A'(x))e^{-A(x)} =$
  $k'(x)e^{-A(x)} + k(x)(-a(x))e^{-A(x)}$
- On remplace $g$ dans l'équation $y' + a(x)y = b(x)$
  $g'x) + a(x)g(x) = b(x)(1)$
  $(1) \Leftrightarrow k'(x)e^{-A(x)}+k(x)(-a(x))e^{-A(x)}+a(x)g(x) = b(x)$
  $(1) \Leftrightarrow k'(x)e^{-A(x)} = b(x)$
- On en déduit $k'$. $\boxed{k'(x) = b(x)e^{A(x)}}$
- Puis $k$. $k(x) = \int b(x)e^{A(x)}$
- Et enfin $g$. $g(x) = k(x)e^{-A(x)}$

# Exemple 3

Résoudre sur $I = ]1; +\infty[$, l'équation différentielle

$$(E) : y' + \frac{1}{x \ln x} y = \frac{e^x}{\ln x}$$

$$a(x) = \frac{1}{x \ln x}$$

$$b(x) = \frac{e^x}{\ln x}$$

# Exemple 3

Résolution de(H) $(H) : y' + \frac{1}{x\ln x}y = 0$

$$a(x) = \frac{1}{x\ln x} = \frac{u'(x)}{u(x)} \quad u(x) = \ln(x)$$

$$A(x) = \ln(|\ln(x)|) = \ln(\ln(x))$$

$$S_H = \{x \mapsto ke^{-A(x)} = ke^{-\ln(\ln(x))} = \frac{k}{\ln(x)}\}$$

# Exemple 3

Recherche d'une solution particulière

$$A(x) = \ln(\ln(x))$$

$$g(x) = k(x)e^{-A(x)}$$

$$k'(x) = b(x)e^{A(x)} = \frac{e^x}{\ln x}e^{\ln(\ln(x))} = e^x$$

$$k(x) = e^x \quad g_p(x) = \frac{e^x}{\ln(x)}$$

# Exemple 3

$$S = \{x \mapsto \frac{k}{\ln(x)} + \frac{e^x}{\ln(x)} \quad k \in \mathbb{R}\}$$

# Exemple 4

Déterminer la solution $f$ de l'équation $xy' + 2y = x + 1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ vérifiant $f(1) = 2$.

# Exemple 4

On se ramène d'abord sur l'intervalle $I$ à une équation normalisée :

$$y' + \frac{2}{x}y = 1 + \frac{1}{x}$$

$$a(x) = \frac{2}{x} \Rightarrow A(x) = 2\ln(x)$$

$$b(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

Equation homogene : $y' + \frac{2}{x}y = 0$

$$S_H = \{x \mapsto ke^{-A(x)} = ke^{-2(\ln(x))} = ke^{-(\ln(x^2))} = \frac{k}{x^2}\}$$

# Exemple 4

Recherche d'une solution particulière

$$A(x) = 2\ln(x)$$

$$g(x) = k(x)e^{-A(x)}$$

$$k'(x) = b(x)e^{A(x)} = (1 + \frac{1}{x})e^{2\ln(x)} = x^2 + x$$

$$k(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \quad g_p(x) = \frac{x}{3} + \frac{1}{2}$$

# Exemple 4

$$S = \{f : x \mapsto \frac{k}{x^2} + \frac{x}{3} + \frac{1}{2} \quad k \in \mathbb{R}\}$$

$$f(1) = 2 \Rightarrow k + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow k = \frac{7}{6}$$

Donc l'unique solution au problème de Cauchy étudié est :

$$S = \{f : x \mapsto \frac{\frac{7}{6}}{x^2} + \frac{x}{3} + \frac{1}{2}\}$$