SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES

1 Solutions d'un système d'équations linéaires

Définition 1.
On appelle système linéaire de type (n, p), un système d'équations de la forme :

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \quad \ddots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

- où les inconnues $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
- où les coefficients du systèmes, c'est à dire les a_{ij} et les b_j sont donnés. On supposera que les coefficients ne sont pas tous nuls.

Une solution du système (S) est donc un p-uplet $(x_1, \ldots, x_p)$ qui vérifie les n équations du système (S).
Un système est dit homogène, si les $b_i = 0, \forall i \in \{1, \ldots, n\}$.
Un système peut avoir :

- plus d'équations que d'inconnues, on le dit alors surabondant
- moins d'équations que d'inconnues, on le dit alors sousabondant
- autant d'équations que d'inconnues, on le dit carré

2 Interprétation sous forme matricielle

Les matrices sont un outil efficace pour la résolution théorique des systèmes et pour leur résolution explicite. Ainsi, le système (S) s'écrit sous la forme matricielle de la façon suivante : $AX = B$ où $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont des matrices données,
$X = (x_j)_{1\leqslant j\leqslant p} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, matrice inconnue à rechercher.

Exemple 1.

Déterminer A, B, X, n et p. $(S_2) : \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = 3 \\ 3x + 5y = 1 \end{cases}$

3 Système de Cramer

Définition 2.
un système linéaire (S) est dit **de Cramer** s'il vérifie les deux conditions suivantes :

(i) le système (S) est carré, c'est à dire qu'il y autant d'équations que d'inconnues, c'est à dire $n = p$,

(ii) il admet une solution unique.

Proposition 1.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) (S) est un système de Cramer,

(ii) la matrice A de l'équation matricielle $AX = B$ associée à ce système est inversible

(iii) $\det(A) \neq 0$,

(iv) le système homogène associé à (S) n'admet que le vecteur nul comme solution.

Les composantes de l'unique solution du système de Cramer (S) sont données pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ par :

$$x_j = \frac{\det(C_1, \dots, C_{j-1}, B, C_{j+1}, \dots, C_n)}{\det A}$$

où les $C_1, \dots, C_n$ sont les colonnes de la matrice A.
Pratiquement, cela signifie que l'on remplace dans A la colonne j par B.

Exemple 2.
Résoudre le système suivant par la méthode de Cramer :

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ -y - z = 1 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$$

4 Résolution d'un système linéaire dans le cas général

4.1 Méthode du rang

Définition 3.
On appelle rang d'un système linéaire (S) et on le note r, le rang de la matrice A qui lui est associée, et donc implicitement le rang de l'application linéaire f canoniquement associée à A. Ainsi, $r = \mathrm{rg}(S) = \dim Imf$.
On observe donc que le rang d'un système est entièrement déterminé par la "partie gauche" du système c'est à dire la partie où apparaissent les inconnues. Le membre de droite n'entre pas en compte dans le calcul du rang du système.

Exemple 3.

Soit le système suivant où m est un paramètre réel : $\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=2 \\ x+2y+mz=3 \end{cases}$

Discuter suivant les valeurs du paramètre m du rang du système.

Pour résoudre un système (S), on détermine une **sous matrice carrée B de A, de dimension le rang de S.**

4.1.1 Nombre d'inconnues=rang S

- On résout le système correspondant aux lignes de B. Ce système est un système de Cramer.
- On regarde si les solutions trouvées sont solutions des autres équations.

Exemple 4. Résoudre par la méthode du rang le système suivant : $(S_2) : \begin{cases} x+y=1 \\ 2x+y=3 \\ 3x+5y=1 \end{cases}$

4.1.2 Nombre d'inconnues > rang S

- On écrit à gauche les inconnues correspondant aux colonnes de B, et à droite les autres inconnues.
- On résout le système avec comme inconnues les inconnues de la partie gauche, appelées inconnues principales. Les lettres de la partie droite deviennent des paramètres.
- Il faut ensuite remplacer les inconnues principales dans les éventuelles équations non utilisées dans B, et vérifier que les solutions trouvées avec B sont aussi solution de ces équations.

Si c'est le cas l'ensemble des solutions est un espace de dimension $p-r$, sinon, le système n'a pas de solution.
Illustrons cela grâce à des exemples.

Exemple 5.
Le nombre de lignes (n) est inférieur au nombre d'inconnues (p).
Résoudre par la méthode du rang le système suivant :

$$(S_1) : \begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x-y-z+t=2 \\ x+y+z-t=3 \end{cases}$$

4.1.3 Avec un paramètre

Exemple 6.
Résoudre l'exemple 3.

4.2 Méthode echelonnée de Gauss

Dans la pratique pour les systèmes sans paramètre, on réduit le système de façon à obtenir un système échelonné comme dans l'exmeple ci dessous :

Exemple 7.
Résoudre par la méthode de Gauss les systèmes suivants :

$$(S_3) : \begin{cases} 2x - 3y + 2z + 6t - 6v = 3 \\ y + z - 2t = 1 \\ z - 2v = 2 \end{cases} \qquad (S_3) : \begin{cases} x = -2 - 2v \\ y = -1 - 2v + 2t \\ z = 2 + 2v \end{cases}$$

5 Un peu de théorie : Théorème de Rouché-Fontené

L'ensemble des solutions d'un système linéaire (S) est par définition $S = \{x \in \mathbb{K}^p / f(x) = b\}$ où x est le vecteur canoniquement associé à la matrice X, et b celui associé à la matrice B. Cet ensemble S est tel que :

- $S = \emptyset$ si $b \notin \operatorname{Im} f$
- $S = \{x_0 + v / v \in \operatorname{Ker} f\}$ si $b \in \operatorname{Im} f$ où x_0 est un vecteur tel que $f(x_0) = b$, c'est à dire une solution de (S). On rappelle que $\operatorname{Im} f = \{f(x)/x \in \mathbb{K}\}$.

Ainsi, on constate que trois cas de figures se présentent. Un système peut :

1. ne posséder aucune solution, c'est le cas si : $b \notin \operatorname{Im} f$ c'est à dire que l'on abouti à un système avec une absurdité.
2. posséder une unique solution, c'est le cas si : $b \in \operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f = \{O_{\mathbb{K}^p}\}$.
3. posséder une infinité de solutions, c'est le cas si : $b \in \operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f \neq \{O_{\mathbb{K}^p}\}$.

Dans le cas où $b \in \operatorname{Im} f$, on dit que le système est **compatible**, dans le sens où il est compatible avec l'existence de solutions.

Remarque 1.
$Ker f$ est un espace vectoriel (Vecteur nul, droite, plan,...) donc, lorsque S est non vide, $S =$ point $+$ espace vectoriel, donc S est un espace affine (Point, droite, plan,....).

5.1 Bilan

Soit (S) un système de n équations à p inconnues auquel on associe l'équation matricielle $AX = B$. Alors :

☞ si $n = p$

✍ Si $\det(A) \neq 0$ alors (S) est de Cramer (donc compatible), il possède alors une unique solution,

✍ si $\det(A) = 0$ alors le système admet une infinité de solutions ou aucune solution.

☞ Si $(n \neq p)$, S peut avoir une unique solution, pas de solution ou une infinité de solutions, mais, le plus souvent,

✍ Si Nbre d'équations $<$ Nbre inconnues, S a souvent une infinité de solutions.

✍ Si Nbre d'équations $>$ Nbre inconnues, souvent, S,n'a pas de solution.

6 Exercices

Exercice 1. Résoudre les systèmes suivants : m, a, b, c, d sont des paramètres réels. λ est un paramètre complexe. On interprétera géométriquement l'ensemble des solutions.

$$(S_1)\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x-y+mz=1 \\ 3x+2y+z=2 \end{cases} \quad (S_2)\begin{cases} x+y+(2m-1)\,z=1 \\ mx+y+z=1 \\ x+my+z=3\,(m+1) \end{cases}$$

$$(S_3)\begin{cases} x+y+z=m+1 \\ mx+y+(m-1)z=m \\ x+my+z=1 \end{cases}$$

$$(S_4)\begin{cases} 2x+5y-8z=4 \\ 4x+3y-9z=1 \\ 2x+3y-z=7 \\ x+8y-7z=m \end{cases}$$

$$(S_5)\begin{cases} x+(m+1)y+2mt=0 \\ mx+z+t=1 \end{cases}$$

$$(S_6 facultatif)\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+ay+bz=c \\ x+by+az=c \end{cases}$$