

# SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

## 1 Solutions d'un système d'équations linéaires

Définition 1.

On appelle système linéaire de type  $(n, p)$ , un système d'équations de la forme :

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

- où les inconnues  $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$
- où les coefficients du systèmes, c'est à dire les  $a_{ij}$  et les  $b_j$  sont donnés. On supposera que les coefficients ne sont pas tous nuls.

Une solution du système  $(S)$  est donc un  $p$ -uplet  $(x_1, \dots, x_p)$  qui vérifie les  $n$  équations du système  $(S)$ .

Un système est dit homogène, si les  $b_i = 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}$ .

Un système peut avoir :

- plus d'équations que d'inconnues, on le dit alors surabondant
- moins d'équations que d'inconnues, on le dit alors sousabondant
- autant d'équations que d'inconnues, on le dit carré

## 2 Interprétation sous forme matricielle

Les matrices sont un outil efficace pour la résolution théorique des systèmes et pour leur résolution explicite. Ainsi, le système  $(S)$  s'écrit sous la forme matricielle de la façon suivante :

$AX = B$  où  $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $B = (b_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  sont des matrices données,

$X = (x_j)_{1 \leq j \leq p} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ , matrice inconnue à rechercher.

Exemple 1.

Déterminer  $A, B, X, n$  et  $p$ .  $(S_2) : \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = 3 \\ 3x + 5y = 1 \end{cases}$

### 3 Système de Cramer

**Définition 2.**

un système linéaire  $(S)$  est dit **de Cramer** s'il vérifie les deux conditions suivantes :

- (i) le système  $(S)$  est carré, c'est à dire qu'il y a autant d'équations que d'inconnues, c'est à dire  $n = p$ ,
- (ii) il admet une solution unique.

**Proposition 1.**

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $(S)$  est un système de Cramer,
- (ii) la matrice  $A$  de l'équation matricielle  $AX = B$  associée à ce système est inversible
- (iii)  $\det(A) \neq 0$ ,
- (iv) le système homogène associé à  $(S)$  n'admet que le vecteur nul comme solution.

Les composantes de l'unique solution du système de Cramer  $(S)$  sont données pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$  par :

$$x_j = \frac{\det(C_1, \dots, C_{j-1}, B, C_{j+1}, \dots, C_n)}{\det A}$$

où les  $C_1, \dots, C_n$  sont les colonnes de la matrice  $A$ .

Pratiquement, cela signifie que l'on remplace dans  $A$  la colonne  $j$  par  $B$ .

**Exemple 2.**

Résoudre le système suivant par la méthode de Cramer :

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ -y - z = 1 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$$

### 4 Résolution d'un système linéaire dans le cas général

#### 4.1 Méthode du rang

**Définition 3.**

On appelle rang d'un système linéaire  $(S)$  et on le note  $r$ , le rang de la matrice  $A$  qui lui est associée, et donc implicitement le rang de l'application linéaire  $f$  canoniquement associée à  $A$ . Ainsi,  $r = \text{rg}(S) = \dim \text{Im} f$ .

On observe donc que le rang d'un système est entièrement déterminé par la "partie gauche" du système c'est à dire la partie où apparaissent les inconnues. Le membre de droite n'entre pas en compte dans le calcul du rang du système.

**Exemple 3.**

Soit le système suivant où  $m$  est un paramètre réel : 
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 2 \\ x + 2y + mz = 3 \end{cases}$$

Discuter suivant les valeurs du paramètre  $m$  du rang du système.

Pour résoudre un système  $(S)$ , on détermine une sous matrice carrée  $B$  de  $A$ , de dimension le rang de  $S$ .

**4.1.1 Nombre d'inconnues=rang S**

- On résout le système correspondant aux lignes de  $B$ . Ce système est un système de Cramer.
- On regarde si les solutions trouvées sont solutions des autres équations.

**Exemple 4.** Résoudre par la méthode du rang le système suivant :  $(S_2) : \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = 3 \\ 3x + 5y = 1 \end{cases}$

**4.1.2 Nombre d'inconnues > rang S**

- On écrit à gauche les inconnues correspondant aux colonnes de  $B$ , et à droite les autres inconnues.
- On résout le système avec comme inconnues les inconnues de la partie gauche, appelées inconnues principales. Les lettres de la partie droite deviennent des paramètres.
- Il faut ensuite remplacer les inconnues principales dans les éventuelles équations non utilisées dans  $B$ , et vérifier que les solutions trouvées avec  $B$  sont aussi solution de ces équations.

Si c'est le cas l'ensemble des solutions est un espace de dimension  $p - r$ , sinon, le système n'a pas de solution.

Illustrons cela grâce à des exemples.

**Exemple 5.**

Le nombre de lignes ( $n$ ) est inférieur au nombre d'inconnues ( $p$ ).

Résoudre par la méthode du rang le système suivant :

$$(S_1) : \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x - y - z + t = 2 \\ x + y + z - t = 3 \end{cases}$$

**4.1.3 Avec un paramètre**

**Exemple 6.**

Résoudre l'exemple 3.

## 4.2 Méthode échelonnée de Gauss (Pivot).

On utilise la même technique que pour la recherche du rang d'une matrice, afin de mettre le système  $(S)$  sous forme dite échelonnée. Ensuite, on discute du nombre des solutions grâce à ce système échelonné. Illustrons cela grâce à des exemples.

### Exemple 7.

1. Résoudre par la méthode du pivot les systèmes des exemples 2,3 et 4.

2. Résoudre le système suivant par la méthode du pivot :  $(S) : \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x + y + z = 1 \\ -x + y - 3z = 1 \end{cases}$

## 5 Un peu de théorie : Théorème de Rouché-Fontené

L'ensemble des solutions d'un système linéaire  $(S)$  est par définition  $S = \{x \in \mathbb{K}^p / f(x) = b\}$  où  $x$  est le vecteur canoniquement associé à la matrice  $X$ , et  $b$  celui associé à la matrice  $B$ . Cet ensemble  $S$  est tel que :

- $S = \emptyset$  si  $b \notin \text{Im } f$
- $S = \{x_0 + v / v \in \text{Ker } f\}$  si  $b \in \text{Im } f$  où  $x_0$  est un vecteur tel que  $f(x_0) = b$ , c'est à dire une solution de  $(S)$ . On rappelle que  $\text{Im } f = \{f(x) / x \in \mathbb{K}\}$ .

Ainsi, on constate que trois cas de figures se présentent. Un système peut :

1. ne posséder aucune solution, c'est le cas si :  $b \notin \text{Im } f$  c'est à dire que l'on abouti à un système avec une absurdité.
2. posséder une unique solution, c'est le cas si :  $b \in \text{Im } f$  et  $\text{Ker } f = \{O_{\mathbb{K}^p}\}$ .
3. posséder une infinité de solutions, c'est le cas si :  $b \in \text{Im } f$  et  $\text{Ker } f \neq \{O_{\mathbb{K}^p}\}$ .


Dans le cas où  $b \in \text{Im } f$ , on dit que le système est **compatible**, dans le sens où il est compatible avec l'existence de solutions.

### Remarque 1.

$\text{Ker } f$  est un espace vectoriel (Vecteur nul, droite, plan,...) donc, lorsque  $S$  est non vide,  $S = \text{point} + \text{espace vectoriel}$ , donc  $S$  est un espace affine (Point, droite, plan,...).

## 5.1 Bilan

Soit  $(S)$  un système de  $n$  équations à  $p$  inconnues auquel on associe l'équation matricielle  $AX = B$ . Alors :

 si  $n = p$

