LES APPLICATIONS LINÉAIRES

Objectifs
- **Savoir ce qu'est une application linéaire.**
- **Connaître les notions d'image et de noyau.**
- **Travailler sur les applications linéaires en dimension finie.**

Dans tout ce chapitre, on utilise de façon générique un ensemble $\mathbb{K}$ qui représente soit $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{C}$.

1 Généralités

Définition 1.
Soient E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit f une application de E dans E'. On dit que f est linéaire ou que f est un homomorphisme ou encore un morphisme de $\mathbb{K}$ espaces vectoriels, si et seulement si f vérifie les propriétés :

(i) $\forall x, y \in E, f(x+y) = f(x) + f(y)$

(ii) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$

Cela signifie que f fait correspondre la structure de $\mathbb{K}$ espace vectoriel de E et celle de E'.

Exemple 1.
Les applications suivantes sont-elles linéaire ?

1. Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et $k \in \mathbb{K}$. L'application de E dans E : $x \mapsto k \cdot x$ appelée homothétie vectorielle de rapport k.
2. L'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $x \mapsto x^2$.

Propriété 1.
Si f est une application linéaire de E dans E' alors on a $f(0_E) = 0_{E'}$.

Exemple 2.

1. Montrer la propriété ci-dessus.
2. La réciproque est-elle vraie ?

Remarque 1.
Pour montrer qu'une application n'est pas linéaire, on peut utiliser la contraposée de la propriété précédente, à savoir, si on a $f(0_E) \neq 0_{E'}$ alors f n'est pas linéaire.

Théorème 1 (Critère pratique)**.**
Soit f une application de E dans E', deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
f est linéaire si et seulement si $\forall x, y \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K} : f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y)$

Exemple 3.

1. L'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$, définie par $(x, y) \mapsto (x - y, 0, y)$ est-elle une application linéaire ?
2. Démontrer le théorème précédent.

Définition 2.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}$.

Exemple 4.
Les applications suivantes sont-elles des formes linéaires ?

1. L'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui à tout (x, y) associe $(2x, y)$.
2. L'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout (x, y) associe $x^2 + y^2$.
3. $f \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ où $f \in \mathcal{C}^0([0, 1])$

2 Opérations sur les applications linéaires

Définition 3.
On note $\mathcal{L}(E, E')$ l'ensemble des applications linéaires du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E'.

Théorème 2.
Soient f, g deux applications linéaires de E dans E' et $k \in \mathbb{K}$. Alors $f + g$ et kf sont des applications linéaires de E dans E'.

Proposition 1. $\mathcal{L}(E, E')$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, sous-espace vectoriel des applications de E dans E'.

Proposition 2. La composée de deux applications linéaires est linéaire.

Exemple 5.
Démontrer la proposition précédente.

3 Les endomorphismes

Définition 4.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Un endomorphisme de E est une application linéaire de E dans lui-même. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

Remarque 2.
Avec des endomorphismes, on utilise la notation suivante : $f \circ f \circ f = f^3$.

Exemple 6.
Pourquoi f^2 n'a pas de sens si f est l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x$?

4 Isomorphismes et automorphismes

Définition 5.
Soit f une application linéaire de E dans E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1. On dit que f est un isomorphisme si et seulement si f est bijective.
2. On dit que f est un automorphisme si et seulement si f est un endomorphisme bijectif, c'est à dire à la fois un endomorphisme et un isomorphisme.

Théorème 3.
La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.

Exemple 7.

1. L'homothétie vectorielle de E de rapport k est-elle un automorphisme ? Si oui déterminer son automorphisme réciproque.
2. L'application définie par $(x, y) \mapsto x + iy$ est-elle un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$? Un automorphisme ?
3. Démontrer le théorème précédent.

5 Noyau et image

5.1 Noyau

Exemple 8.
Soit f une application linéaire.

On a vu dans le premier paragraphe que l'on a $f(0_E) = 0_{E'}$.

1. Existe t'il d'autres vecteurs u pour lesquels $f(u) = 0_{E'}$?
2. Montrer que f injective est une condition nécessaire et suffisante sur f pour que 0_E soit le seul vecteur u de E pour lequel $f(u) = 0_{E'}$.

D'après l'exemple précédent, on s'aperçoit que l'ensemble des vecteurs de E qui ont une image nulle par f, permet de caractériser si une application linéaire est injective ou non. On introduit donc la définition suivante :

Définition 6.
Soient E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit f une application linéaire de E dans E'. Le **noyau** de f est l'ensemble :

$$\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\{0_{E'}\}) = \{x \in E / f(x) = 0_{E'}\}$$

Exemple 9.

1. Soit $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (y, x + y + z)$. Quel est le noyau de u ?
2. Soit $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (2x - y, x + 2y, x + y)$. Quel est le noyau de u ?

Théorème 4.
Le noyau d'une application linéaire de E dans E' est un sous-espace vectoriel de E.

Exemple 10.
Démontrer le théorème précédent.

D'après l'exemple précédent, on en déduit le théorème suivant :

Théorème 5.
Soit f une application linéaire de E dans E' alors f est injective si et seulement si : $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$

5.2 Image

Définition 7.
Soient E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit f une application linéaire de E dans E'. L' **image** de f est l'ensemble :

$$\Im m f = f(E) = \{f(x)/x \in E\}$$

Exemple 11.
Déterminer l'image des applications linéaires suivantes :

1. Soit $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (y, x + y + z)$.
2. Soit $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (2x - y, x + 2y, x + y)$.

Théorème 6.
L'image d'une application linéaire de E dans E' est un sous-espace vectoriel de E'.

Exemple 12.
Démontrer le théorème précédent.

Théorème 7.
Soient E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to E'$ une application linéaire.
Si $S = (e_1, \dots, e_p)$ engendre E, c'est à dire $E = Vect(e_1, \dots, e_p)$ alors $S' = (f(e_1), \dots, f(e_p))$ engendre $\Im m f$ c'est-à-dire

$$\Im m f = Vect\,(f(e_1), \dots, f(e_p))$$

Remarque 3.
Le théorème précédent permet de déterminer $\Im m f$ uniquement à l'aide d'une famille génératrice de E.

Exemple 13.

1. Retrouver l'image des applications linéaires suivantes à l'aide du théorème précédent :
   (a) Soit $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (y, x + y + z)$.
   (b) Soit $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (2x - y, x + 2y, x + y)$.
2. Démontrer le théorème précédent.

6 Applications linéaires en dimension finie

6.1 Applications linéaires et familles de vecteurs

Théorème 8.
Soient E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to E'$ une application linéaire.

1. f est injective $\Leftrightarrow$ l'image par f de toute famille libre de E est une famille libre de E' c'est à dire :
   soit $B = (e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de E, f est injective $\Leftrightarrow (f(e_1), \dots, f(e_p))$ est libre dans E'.
2. f est surjective $\Leftrightarrow$ l'image par f de toute famille génératrice de E est une famille génératrice de E' c'est à dire :
   soit $B = (e_1, \dots, e_p)$ une famille génératrice de E, f est surjective $\Leftrightarrow (f(e_1), \dots, f(e_p))$ est génératrice de E'.
3. f est bijective $\Leftrightarrow$ l'image par f de toute base de E est une base de E' c'est à dire :
   soit $B = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E, f est bijective $\Leftrightarrow (f(e_1), \dots, f(e_p))$ est une base de E'.

6.2 Théorème du rang

Théorème 9.
Soit f une application linéaire de E dans E', on a alors :

$$\boxed{\dim \operatorname{Ker} f + \dim \Im m f = \dim E}$$

Exemple 14. Démontrer le théorème précédent.

Remarque 4.

≥ 0

1. On notera en particulier que $\boxed{\dim \Im m f \leqslant \dim E}$ on perd des dimensions en appliquant f et cette perte de dimensions est mesurée par le noyau de f : s'il est réduit au vecteur nul, la dimension de E est conservée.
2. Dans le théorème du rang, la dimension de l'espace d'arrivée n'intervient pas.

Exemple 15.
Vérifier la formule du théorème du rang dans le cas $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (0, x + y)$.

6.3 Rang d'une application linéaire

Définition 8.
Soient E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et f une application linéaire de E dans E'. On appelle rang de f la dimension de $\Im m f$.

Remarque 5.
Ainsi, le théorème du rang s'écrit donc également : $\operatorname{rg}(f) = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f$

Théorème 10.
Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors pour toute application linéaire f de E dans E' on a : $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n))$

Exemple 16.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = (x+y, y+z, 2x+y-z)$

Déterminer le rang de deux façons différentes de $(f(\vec{i}), f(\vec{j}), f(\vec{k}))$ où $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Théorème 11.
Soient E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et f une application linéaire de E dans E' alors on a les équivalences suivantes :

— f est injective $\Leftrightarrow \text{rg}(f) = \dim E$
— f est surjective $\Leftrightarrow \text{rg}(f) = \dim E'$
— f est bijective $\Leftrightarrow \dim E = \text{rg}(f) = \dim E'$

- $\underbrace{\dim(\ker f)}$ + $\boxed{\dim(\mathfrak{Im} f) = \dim E}$

• surjective $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{Im} f = E'$

6.4 Caractérisation des isomorphismes

Théorème 12.
Soient E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de **même** dimension finie et f une application linéaire de E dans E'. Les affirmations suivantes sont équivalents :

$\boxed{\dim E = \dim E'}$

1. f est injective.
2. f est surjective.
3. f est bijective.

et donc son corollaire :

Corollaire 1.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f une application linéaire de E dans E, c'est à dire un endomorphisme.

$E = E'$

On a : f est un automorphisme de $E \Leftrightarrow \underbrace{\text{Ker} f = \{0_E\}}_{\text{injectivité}} \Leftrightarrow \underbrace{\Im m f = E}_{\text{surjectivité}}$

Exemple 17.
Montrer que f de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même définie par : $f(1,0) = (2,2)$ et $f(0,1) = (1,3)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 18.
Soit

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) \mapsto (x, x+y, y) \end{cases}$$

$f(x,y) = (x, x+y, y)$

Montrer que f est injective mais non surjective.

• $(x,y) \in \ker f \Rightarrow f(x,y) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x+y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \ker f \subseteq \{0_{\mathbb{R}^2}\}$

$\supseteq$ (tjs vraie)

$\ker f = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$

$\Rightarrow f$ est injective $\boxed{\dim \ker f = 0}$

thm 7 $\mathbb{R}^2 = \text{Vect}((0,1), (1,0))$

• $\mathfrak{Im} f = \text{Vect}(f(0,1), f(1,0)) = \text{Vect}\left(\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \right)$

$\forall$ ces 2 vecteurs ne sont pas colinéaires

$\boxed{\dim \mathfrak{Im} f = 2}$

Ex 1: $\quad f(x,y) = (2x+y, 2x+3y)$ $\quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

- f linéaire

- $(x,y) \in \ker f \Rightarrow f(x,y) = (0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+y=0 \\ 2x+3y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-2x \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow x=y=0$$

$$\ker f = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$$
$\subset$
$\supset$ (tjs vraie)

f est 1 applicat° linéaire de $\mathbb{R}^2$ ds $\mathbb{R}^2$ (endomorphisme)
injective $\Rightarrow$ bijective

<u>Automorphisme</u>
$\to$ f linéaire
$\to$ $E' = E$
$\to$ f bijective

<u>Exo 8</u> :

- $E = \mathbb{R}^2 \qquad E' = \mathbb{R}^2$

- $u = (x,y)$
  $v = (x',y')$
  $\alpha \in \mathbb{K}$

$$f(\alpha u + v) = f((\alpha x + x', \alpha y + y'))$$
$$= (\alpha x + x' + \alpha y + y', \alpha x + x' - \alpha y - y')$$
$$= (\alpha x + \alpha y, \alpha x - \alpha y) + (x'+y', x'-y')$$
$$= \alpha f(u) + f(v)$$

$\Rightarrow f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \Rightarrow$ f <u>endomorphisme</u>

- $(x,y) \in \ker f \Rightarrow f(x,y) = (0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ 2x=0 \end{cases} \Rightarrow x=y=0$$

$\ker f = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$
$\subset$
$\supset$

f est donc 1 endomorphisme <u>injectif</u> $\Rightarrow$ f bijective
$\Rightarrow$ f Automorphisme

$f(x, y) = (x + y, x - y)$

Exercices

Exercice 1.
Parmi les applications suivantes, quelles sont celles qui sont linéaires ?

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (x - z, x + y) \end{cases}$$

$$f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (xz, x, x + z) \end{cases}$$

$$f_3 : \begin{cases} C^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}) \\ f \mapsto f + f' \end{cases}$$

$$f_4 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \mapsto (x + y, x, y) \end{cases}$$

$$f_5 : \begin{cases} C^0(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}) \\ f \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt \end{cases}$$

$$f_6 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x + 1, y) \end{cases}$$

$$f_7 : \begin{cases} \mathcal{C}(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R}) \\ f \mapsto 2f \end{cases}$$

Exercice 2.
Les applications suivantes sont-elles des formes linéaires ?

1. L'application nulle de E dans $\mathbb{K}$.
2. $(x, y) \mapsto ax + by$ où $(x, y, a, b) \in \mathbb{R}^4$.
3. Soit u_0 un vecteur de $\mathbb{R}^2$. L'application qui à tout vecteur u de $\mathbb{R}^2$ associe le produit scalaire de u par u_0.

Exercice 3.
Pour les applications qui sont linéaires, reprendre les fonctions de l'exercice 1 et déterminer leur noyau et leur image. Préciser si les fonctions sont injectives et (ou) surjectives.

Exercice 4.
Soit p l'application définie par : $p : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (4x - 6y, 2x - 3y) \end{cases}$

1. Montrer que p est linéaire.
2. Montrer que p est un projecteur c'est-à-dire que $p \circ p = p$.
3. Déterminer Ker p et Im p.
4. p est-elle injective ? Surjective ?
5. Montrer que $\forall y \in Im(p),\ p(y) = y$.
6. Montrer que, d'une façon générale, si p est un endomorphisme tel que $p \circ p = p$ alors $Ker(p) \oplus Im(p) = \mathbb{R}^2$.
7. En déduire la construction graphique de $p(u)$ avec l'endomorphisme p du début de l'énoncé.

Exercice 5.
On rapporte $\mathbb{R}^2$ à sa base canonique $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ et $\mathbb{R}^4$ à sa base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$. Soit ϕ : $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\phi\left(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 + t\vec{e}_4\right) = (x + y + 2z + t)\,\vec{i} + (2x - y + 2z - 7t)\,\vec{j}$$

On admet que ϕ est une application linéaire.
Déterminer Ker ϕ et Im ϕ.

Exercice 6.
On définit l'application f du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^5$, en posant, pour tout vecteur $x = (\alpha, \beta)$ de $\mathbb{R}^2$: $f(x) = (\alpha + 2\beta, -2\alpha + 3\beta, \alpha + \beta, 3\alpha + 5\beta, -\alpha + 2\beta)$.
On admet que f est une application linéaire.

1. Déterminer $\mathrm{Ker}\,(f)$ ainsi que sa dimension.
2. Déterminer $\Im m\,(f)$ ainsi que sa dimension.

Exercice 7.
Dans l'espace vectoriel $E = C^\infty(\mathbb{R})$, soient $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = e^{2x}$, $f_3(x) = e^{3x}$.

1. Déterminer la dimension du sous espace vectoriel F de E définie par $F = Vect\,(f_1, f_2, f_3)$
2. Soit $\phi : F \to F$, définie par $\forall f \in F, \phi(f) = f'' + f' - 3f$. Montrer que ϕ est un endomorphisme de F.
3. ϕ est-il un automorphisme ?

Exercice 8.
Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f : (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$.

1. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer sa fonction réciproque.

Exercice 9.
Soit E et E' deux espaces vectoriels de dimension finie, et f une application linéaire de E dans E'.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Il est possible d'avoir f non bijective et $\dim E = \dim E'$.
2. Il est possible d'avoir f non bijective et $\dim E = \dim \mathrm{Im}\, f$.
3. Il est possible d'avoir f non bijective et $\dim E' = \dim \mathrm{Im}\, f$.
4. Si $\mathrm{rg}\, f = 5$ et $\dim E' = 3$, alors on ne peut pas connaître $\dim \mathrm{Ker}\, f$.
5. Si $\dim E$=5, et f surjective alors $\dim E'$=5.
6. Si $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ est une famille liée de E, alors $f(\mathcal{F})$ est une famille liée de E'.
7. Si $\mathcal{F} = (u_1, u_2)$ est une famille libre de E, alors $f(\mathcal{F})$ est une famille libre de E'.

Exercice 10.
Soit a, b, c trois réels tels que $c \neq 0$. On considère dans $\mathbb{R}^3$, le vecteur : $w = (a, b, c)$.

Soit $\mathcal{B}_c = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On appelle f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui à tout vecteur $t = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ associe le vecteur $f\,(t) = (c\,y - b\,z,\ a\,z - c\,x,\ b\,x - a\,y)$.

1. Montrer que $w \in \mathrm{Ker}\,(f)$.
2. Montrer que la famille $\left(f(\vec{i}),\ f(\vec{j})\right)$ est libre.
3. En déduire que $\mathrm{Ker}\,(f) = Vect\,(w)$ et déterminer une base de $\Im m\,(f)$.
4. f est-elle injective ? Or $(\vec{i}, \vec{j})$ et $\left(f(\vec{i}),\ f(\vec{j})\right)$ sont libres. Cela est-il en contradiction avec 1) du théorème 8 ?

Exercice 11.
Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de $\mathbb{R}^3$ et f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :
$f(x, y, z) = (y - x, y + z, x)$.

1. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Quel est le rang de f ?
3. Soit $F = \mathcal{V}ect(f(\vec{i}), f(\vec{j}))$ et $G = \mathcal{V}ect(f(\vec{i}), f(\vec{k}))$.
   Sans aucun calcul déterminer $F \cap G$.

Exercice 12.

Dans $\mathbb{R}^2$, on définit un endomorphisme u par :
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad u(x, y) = (2x - y, x + y)$.

1. Quel est le rang de u ? En déduire que u est inversible.
2. Soit $X = (x, y)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^2$.
   (a) Déterminer l'image de X par $u \circ u$.
   (b) Que peut-on dire de la famille $(X, u(X), u \circ u(X))$? En déduire trois réels non nuls $\alpha, \beta, \varepsilon$ indépendants de x et de y tels que : $\alpha u \circ u(X) + \beta u(X) + \varepsilon X = 0$.
   (c) En déduire que l'endomorphisme $v = \alpha u \circ u + \beta u + \varepsilon Id$ est l'endomorphisme nul.
   (d) En composant v par u^{-1}, en déduire u^{-1} en fonction de u et Id. Déterminer les coordonnées de $u^{-1}(X)$ en fonction de x et de y.

Exercice 13. (facultatif)
Soit f et g deux endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Montrer que $\Im m(g \circ f) \subset \Im m(g)$ et $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$.

Exercice 14. (facultatif)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3. Soit g un endomorphisme de E vérifiant $g^2 \neq 0$ et $g^3 = 0$.

1. Vérifier les inclusions suivantes : $0_E \subset \mathrm{Ker}\ g \subset \mathrm{Ker}\ g^2 \subset E$.
2. Montrer que $1 \leqslant \dim \mathrm{Ker}\ g \leqslant 2$

Exercice 15. (facultatif)
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de de dimension finie.

1. On considère les applications linéaires :
   $$\phi : \begin{cases} F \times G \to E \\ (x, y) \mapsto x + y \end{cases} \quad \text{et } \psi : \begin{cases} F \cap G \to F \times G \\ x \mapsto (x, -x) \end{cases} .$$
   (a) Montrer que ϕ et ψ sont des applications linéaires.
   (b) A quelle condition sur F et G, ϕ est-elle un isomorphisme ?
   (c) Comparer $\mathrm{Ker}\ \phi$ et $\mathrm{Im}\ \psi$.
   (d) Justifier que $\dim \mathrm{Im}\ \psi = \dim F \cap G$.
2. Montrer que $\dim F \times G = \dim F + \dim G$.
3. En déduire, a l'aide de la formule du rang, une démonstration de la formule de Grassmann :
   $$\dim F + G = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$$