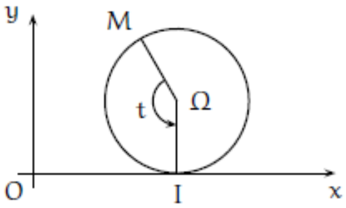
COURBE PLANE PARAMÉTRÉE

Objectif : Savoir étudier une courbe paramétrée.

1 Introduction

On munit $\mathbb{R}^2$ d'un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, on appelle I un ensemble de $\mathbb{R}$ et on appelle $\mathcal{P}$, l'ensemble des points du plan $\mathbb{R}^2$.
Pour définir une courbe plane, on a besoin de déterminer les coordonnées x et y de tout point M de la courbe. Ces coordonnées peuvent être reliées par une équation cartésienne : il existe une fonction g telle que $g(x, y) = 0$. Par exemple, ces équations peuvent être du type $y = f(x)$ où f est connue explicitement, ou, pour un cercle : $x^2 + y^2 = 1$.
Parfois, il est plus aisé de déterminer séparément chacune des coordonnées en fonction d'un paramètre, comme le montre l'exemple suivant :

Un cercle (C), de rayon $R > 0$, roule sans glisser sur l'axe (Ox). On note I le point de contact entre (C) et (Ox) et on note Ω le centre de (C) (Ω et I sont mobiles). M est un point donné de (C) (M est mobile, mais solidaire de (C)). On pose $t = (\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega I}})$.
Déterminer les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ du point M.



Cette courbe que l'on étudiera par la suite s'appelle une cycloïde. Elle a la particularité suivante : c'est une courbe brachistochrone au sens de Roberval, c'est-à-dire qu'une cycloïde représente la courbe sur laquelle doit glisser sans frottement et sans vitesse initiale, un point matériel pesant placé dans un champ de pesanteur uniforme de sorte que son temps de parcours soit minimal parmi toutes les courbes joignant deux points fixés. Autrement dit, c'est la courbe de descente la plus rapide pour aller d'un point A à un point B. On montre cette propriété en montrant que $2yy'' + y'^2 + 1 = 0$, qui est l'équation différentielle vérifiée par tout point de la cycloïde "inversée".

2 Fonctions de I dans $\mathbb{R}^2$

Définition 1. Soit x et y deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$. Une fonction f de I dans $\mathbb{R}^2$ est définie par :

$$\left\{ \begin{array}{lcc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \to & (x(t), y(t)) \end{array} \right.$$

t est appelée le paramètre de f.

Définition 2. Continuité de f
f est continue en t_0 signifie que $\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = f(t_0)$.
Elle est continue sur I signifie qu'elle est continue en tout point de I.
On a l'équivalence suivante :

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = f(t_0) \Leftrightarrow \lim_{t \to t_0} x(t) = x(t_0) \ et \ \lim_{t \to t_0} y(t) = y(t_0)$$

Définition 3.
Le représentation graphique de f est l'ensemble des points $M(t)$ de $\mathcal{P}$ de coordonnées $f(t)$, où t décrit I. Cette courbe est appelée courbe paramétrée.

Remarque 1. L'écriture d'une courbe paramétrée Γ est le plus souvent donnée sous la forme d'un système du type :

$$\Gamma \left\{ \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \right.$$

3 Variations de f

Définition 4. Dérivabilité de f
f est dérivable en t_0 signifie que $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ existe et est finie.
On appelle cette limite $f'(t_0)$.
f est dérivable sur I signifie que f est dérivable en tout point de I.
f est dérivable en t_0 si et seulement si x et y sont dérivables en t_0 et on a alors $f'(t_0) \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}$

Remarque 2. Point de vue mécanique

- $M(t)$ peut être considéré comme la position d'un point M en fonction du temps t. La paramétrisation définit un sens de parcours de la courbe suivant les t croissants.
- $f'(t)$ est alors le vecteur vitesse au point $M(t)$.

Pour étudier les variations de f, on établit un tableau de variations conjoint de x et y.

Exemple 1. Étudier les variations de la fonction f définie par :

$$f \begin{cases} x(t) = & t^2 + \dfrac{1}{t^2} \\ y(t) = & 2t + \dfrac{1}{t^2} \end{cases}$$

4 Tangentes

Définition 5. Point ordinaire ou stationnaire.
$M(t_0)$ est un **point régulier** ou **point ordinaire** de la courbe si et seulement si le vecteur dérivé $f'(t_0) \neq 0$.
$M(t_0)$ est un **point singulier** ou **point stationnaire** si et seulement si le vecteur dérivé $f'(t_0) = 0$.

Propriété 1. Tangente en un point régulier
Soit $M(t)$ un point régulier.
La tangente en $M(t)$ a comme vecteur directeur le vecteur dérivé $f'(t)$.

Remarque 3. Si $f'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ y'(t) \end{pmatrix}$ et $y'(t) \neq 0$ alors la tangente est verticale en $M(t)$.

Si f est n fois dérivable, $f^{(n)}(t_0)$ peut être considéré comme le vecteur de coordonnées $(x^{(n)}(t_0), y^{(n)}(t_0))$.

Propriété 2. Tangente en un point stationnaire
Soit $M(t_0)$ un point stationnaire et $p = \min\{j \in \mathbb{N}^* / f^{(j)}(t_0) \neq 0\}$.
La tangente en $M(t)$ a comme vecteur directeur le vecteur $f^{(p)}(t_0)$.

Étudions la forme de la courbe au voisinage d'un point stationnaire. On suppose que f est de classe C^∞.
Soit $q = \min\{j \in \mathbb{N}^* / j > p$ et les vecteurs $f^{(p)}(t_0)$ et $f^{(q)}(t_0)$ non colinéaires $\}$.

Le développement de f de Taylor-Young à l'ordre q au voisinage de t_0 est :

$$f(t_0 + h) = f(t_0) + hf'(t_0) + ... + \frac{h^p}{p!} f^{(p)}(t_0) + ... + \frac{h^q}{q!} f^{(q)}(t_0) + o(h^q)$$

$$f(t_0 + h) = f(t_0) + h^p\left(\frac{1}{p!} + k_1 \frac{h}{(p+1)!} + ... + k_{q-p-1} \frac{h^{q-p-1}}{(q-1)!}\right) f^{(p)}(t_0) + \frac{h^q}{q!} f^{(q)}(t_0) + o(h^q)$$

Déduire de l'expression précédente, des valeurs approchées des coordonnées de $\overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)}$ dans le repère $(M(t_0), f^{(p)}(t_0); f^{(q)}(t_0))$ lorsque h tend vers 0.

En déduire le tableau suivant :

	p impair	p pair
q pair		
q impair		

Exemple 2. Déterminer la nature du point stationnaire de l'exemple 1.

Exemple 3. Déterminer les points stationnaires, ainsi que leur nature de la courbe d'équation

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + t^3 \\ y(t) = t^4 \end{cases}$$

5 Branches infinies

Ici t_0 désigne éventuellement $\pm\infty$.

- Si $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = x_0$ et $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = y_0$, alors le point est régulier. On prolonge la courbe le cas échéant.
- Si $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = x_0$ et $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty$, alors la courbe admet une asymptote verticale $x = x_0$.
- $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = y_0$, alors la courbe admet une asymptote horizontale $y = y_0$
- $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty$, alors on étudie $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)}$
  - Si $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$ la courbe admet une branche parabolique de direction Oy

- Si $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 0$ la courbe admet une branche parabolique de direction Ox
- Si $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = a \in \mathbb{R}^*$ alors on étudie $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) - ax(t)$
  - Si $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) - ax(t) = \pm\infty$ alors la courbe admet une branche parabolique de direction $y = ax$
  - Si $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) - ax(t) = b$ alors la courbe admet une asymptote oblique $y = ax + b$

Exemple 4. Déterminer la nature des branches infinies des courbes paramétrées suivantes :

$$(\Gamma_1) : \begin{cases} x(t) = \dfrac{2-t}{t^2} \\ y(t) = t^3 \end{cases} \qquad (\Gamma_2) : \begin{cases} x(t) = 2t^2 - t \\ y(t) = t^2 + 1 \end{cases} \qquad (\Gamma_3) : \begin{cases} x(t) = t - \dfrac{1}{t} \\ y(t) = t + \dfrac{1}{t} + 1 \end{cases}$$

6 Plan d'étude d'une courbe paramétrée

Pour étudier une courbe paramétrée donnée par : $\Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ on suit le plan suivant :

❶ On cherche les domaines de définition de x et de y

❷ puis les domaines d'étude : on restreint les ensembles de définition en tenant compte des éventuelles symétries pour x et pour y

❸ puis on cherche les domaines de continuité, de dérivabilité.

❹ On étudie les variations conjointes dans un tableau où figurent simultanément : x', x, y, y' (dans l'ordre).

❺ On détermine les points stationnaires.

❻ On détermine les branches infinies.

❼ On trace la courbe Γ.

Exercices

Exercice 1.

1. Montrer que la courbe définie par

$$\Gamma \begin{cases} x = x_0 + R\cos(t) \\ y = y_0 + R\sin(t) \end{cases}$$

est un cercle dont on déterminera le rayon et le centre.

2. Déterminer une autre équation paramétrique du cercle précédent.

Exercice 2.

1. Soit C une courbe d'équation $y = f(x)$ dans un repère R. Existe-il une fonction g telle que C ait pour équation $y = g(x)$ et $f \neq g$?

2. Donner une équation paramétrique de C.

Exercice 3. Etude et tracé des courbes définies ci-dessous :

1. $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{1+t-t^2} \\ y(t) = \ln\left(1+t^2\right) \end{cases}$

2. $\begin{cases} x(t) = 2t + t^2 \\ y(t) = 2t - \dfrac{1}{t^2} \end{cases}$

3. $\begin{cases} x(t) = e^{t-1} - t \\ y(t) = t^3 - 3t \end{cases}$

4. $\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{t} + \ln(2+t) \\ y(t) = t + \dfrac{1}{t} \end{cases}$

Exercice 4.

Le lemniscate de Bernoulli est défini par : $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{1+t^4} \\ y(t) = \dfrac{t^3}{1+t^4} \end{cases}$

1. Exprimer

   (a) $x(-t)$ en fonction de $x(t)$ et $y(-t)$ en fonction de $y(t)$, en déduire la position du point $M(-t)$ par rapport au point $M(t)$, puis une première restriction du domaine de définition

   (b) pour $t > 0$, $x(\frac{1}{t})$ en fonction de $y(t)$ et $y(\frac{1}{t})$ en fonction de $x(t)$, en déduire la position du point $M(\frac{1}{t})$ par rapport au point $M(t)$, puis le domaine d'étude.

2. Finir d'étudier la courbe et la tracer.

Exercice 5. Trouver une équation cartésienne des supports des arcs suivants :

1) $\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = -t^2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^3 \end{cases}$

Exercice 6.

1. Étude complète de l'astroïde : $\Gamma : \begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases}$

   (a) Étudier la parité de x et de y

   (b) Exprimer $x(t+\pi)$ en fonction de $x(t)$ et exprimer $y(t+\pi)$ en fonction de $y(t)$.

   (c) En déduire un intervalle d'étude

   (d) Faire l'étude sur cet intervalle et tracer la courbe

2. Pour $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on note $A(t)$ et $B(t)$ les points d'intersection de la tangente au point courant $M(t)$ avec respectivement (Ox) et (Oy). Calculer la longueur $A(t)B(t)$.

3. Exprimer $x(\frac{\pi}{2} - t)$ en fonction de $y(t)$ et exprimer $y(\frac{\pi}{2} - t)$ en fonction de $x(t)$. Quel autre intervalle d'étude aurait on pu utiliser ?

Exercice 7. (facultatif)
Etude et tracé des courbes définies ci-dessous :

1. Courbe de Lissajous $\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \sin 2t \end{cases}$

2. La cardioïde : $\begin{cases} x(t) = a\,(1 + \cos t) \cos t \\ y(t) = a\,(1 + \cos t) \sin t \end{cases}$

   La cardioïde est le lieu d'un point d'un cercle roulant sans glisser, extérieurement, autour d'un cercle de même rayon (ici, cercle de rayon a/2 roulant sans glisser autour du cercle (C)).